ARNOLD, M.

Numerische Probleme in der dynamischen Simulation von Rad–Schiene–Systemen

Durch dynamische Simulation will man die Auswirkungen konstruktiver Veränderungen auf das Fahrverhalten von Schienenfahrzeugen (näherungsweise) beschreiben. Bei vergleichsweise groben Genauigkeitsschranken stehen Forderungen nach großer Zuverlässigkeit und kleinen Rechenzeiten der verwendeten Algorithmen im Vordergrund. Im Rahmen von Simulationsprogrammen für mechanische Mehrkörpersysteme (MKS) haben sich MKS–Modelle für Rad–Schiene–Systeme bewährt. Wesentliche Bestandteile des Modells sind die geometrische Beschreibung des Rad–Schiene–Kontakts und die Berechnung der Reibungskräfte. Jeden der real *elastischen* Rad–Schiene–Kontakte ersetzt man dabei in sehr guter Näherung durch eine *holonome Zwangsbedingung* an die MKS–Lagekoordinaten p ([5]). Dagegen wird die elastische Deformation von Rad und Schiene und die Ausbildung einer Kontakt*fläche* bei der Berechnung der *Reibungskräfte* berücksichtigt (KALKERsche Rollreibungstheorie [3]).

Zentrale Komponente des Modells ist der Kontakt*punkt*, ein Punkt der Radoberfläche, in dem sich die undeformierten Körper von Rad und Schiene berühren. Vernachlässigt man die elastische Deformation und ist die relative Lage von Rad und Schiene gegeben, so nimmt der Abstand zwischen Rad und Schiene im Kontaktpunkt sein globales Minimum an, die Koordinaten s des Kontaktpunkts sind also durch die Lagekoordinaten p bestimmt: $s = s(p)$. Der Kontaktpunkt fällt geometrisch mit einem Punkt der Gleisoberfläche zusammen, d. h., für eine geeignet definierte Funktion g muß die *Kontaktbedingung* $g(p, s(p)) = 0$ erfüllt sein. Vereinfachend wird vorausgesetzt, daß die Reibungskraft im Kontaktpunkt angreift und in der Tangentialebene an die Radoberfläche wirkt. Zur Berechnung des Betrags F_R der Reibungskraft mit Standardsoftware (FASTSIM, [3]) ist die Approximation durch einen HERTZschen Einpunktkontakt sinnvoll. Die Kontaktfläche wird durch eine Ellipse um den Kontaktpunkt angenähert. Die Reibungskraft ist dann abhängig von der relativen Geschwindigkeit des Rades zur Schiene, von der Kontaktkraft und von Parametern $\theta(s(p))$, die durch die Krümmungen von Rad- und Schienenoberfläche im Kontaktpunkt bestimmt sind (z. B. Halbachsenverhältnis und Flächeninhalt der Kontaktellipse).

Die globale Minimumsuche zur Bestimmung von $s(p)$ wird durch eine effiziente Kombination von Bisektions- und Newtonverfahren realisiert ([4]). Im Kontaktpunkt nimmt nicht nur der Abstand zwischen Rad und Schiene sein globales Minimum an, hier haben auch die Normalenvektoren an die Oberflächen von Rad und Schiene gleiche Richtung. (Andernfalls würden sich Rad und Schiene in einer Umgebung des Kontaktpunkts durchdringen.) Es gilt also $h(p, s(p)) = 0$ mit einer entsprechend definierten Funktion h. Die Auswertung dieser *lokalen* Bedingung erfordert weniger als 2% der für die *globale* Minimumsuche benötigten Rechenzeit. Ändert sich die Lage des Kontaktpunkts stetig mit der Lage des Rades, so sind beide Bedingungen äquivalent.

Die Zustandsänderung des Rad–Schiene–Systems wird dann durch die EULER–LAGRANGEschen Gleichungen

$$\begin{aligned} M(p)\ddot{p} &= f(p, s, \dot{p}, \lambda, t) - G^T(p, s)\lambda \\ 0 &= h(p, s) \\ 0 &= g(p, s) \end{aligned} \tag{1}$$

beschrieben; $M(p)$ bezeichnet hier die Massematrix, der Vektor f der eingeprägten und äußeren Kräfte enthält u. a. die Reibungskräfte. Die Kontaktbedingungen $g = 0$ sind über LAGRANGEsche Multiplikatoren λ an die dynamischen Gleichungen gekoppelt, $G := \frac{\partial}{\partial p} g(p, s)$. Die EULER–LAGRANGEschen Gleichungen für mechanische Mehrkörpersysteme mit holonomen Zwangsbedingungen sind differential-algebraische Systeme vom Index 3. System (1) unterscheidet sich von den meist betrachteten Systemen in *Hessenbergform* durch die zusätzlichen Gleichungen $h = 0$, die die Lage der Kontaktpunkte definieren. Diese Gleichungen sind lokal eindeutig nach s auflösbar.

Die Kombination von Standardsoftware für Systeme in Hessenbergform (z. B. die BDF–Codes DASSL oder ODASSL [2]) mit Modifikationen, die der speziellen Gestalt von (1) Rechnung tragen ([1]), ermöglicht zuverlässig die effiziente dynamische Simulation von Rad–Schiene–Systemen. Abb. 1 zeigt ein typisches Simulationsergebnis ([4]): ein star-

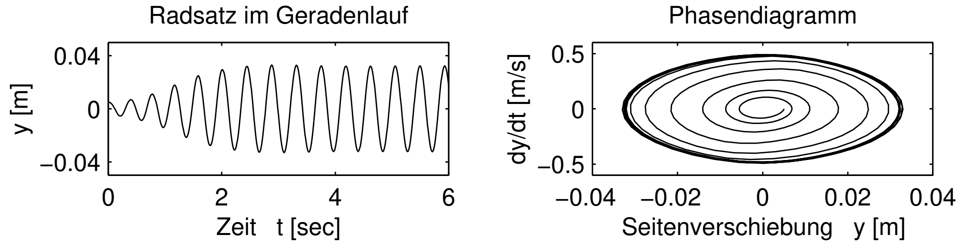

Abbildung 1: Geradenlauf eines starren Radsatzes

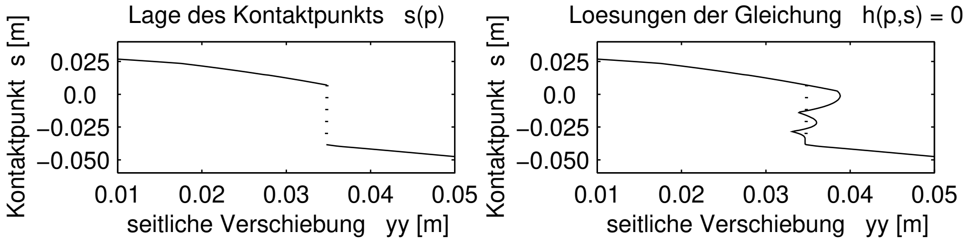

Abbildung 2: Kontaktpunkt-sprung

rer Radsatz wird mit konstanter Geschwindigkeit im Geradenlauf geführt. Bei einer seitlichen Anfangsauslenkung von 4 mm erreicht die Lösung einen Grenzzyklus.

Für theoretische Untersuchungen idealisiert man häufig die Profile von Rad und Schiene (in Abb. 1 kegelförmiges Rad und elliptischer Gleisquerschnitt); Lage und Größe der Kontaktfläche ändern sich dann stetig mit der Lage des Rades. Kommt jedoch bei den *real* eingesetzten Profilen die Flanke des Rades in Kontakt mit dem Gleis (z. B. bei Einfahrt in einen Gleisbogen), so springt die Kontaktfläche von der Lauffläche auf die Flanke (*Flankenanlauf*). Im Modell wird der Flankenanlauf als *Kontaktpunktsprung* widergespiegelt: Abb. 2 zeigt links bei fixiertem Gier- und Rollwinkel die Lage $s(p)$ des Kontaktpunkts in Abhängigkeit von der seitlichen Verschiebung yy eines einzelnen Rades gegenüber der Schiene (Kontaktpunktsprung bei $yy = 35\,\mathrm{mm}$).

Physikalisch entspricht dem Sprung des Kontaktpunkts von der Lauffläche auf die Flanke des Rades ein *Reibstoß*: die Lage des Rades bleibt unverändert, Geschwindigkeitsvektor und Zwangskräfte ändern sich unstetig. Die Zustandsänderung wird nicht mehr allein durch die Euler–Lagrangeschen Gleichungen beschrieben, zusätzlich ist ein physikalisches Modell für die Zustandsänderung während des Reibstoßes erforderlich. Die Lösung von (1) ist zu diskreten Zeitpunkten t_i unstetig. Während der numerischen Integration muß an diesen Punkten die Berechnung unterbrochen werden, um den Zustandsvektor dem Reibstoßmodell folgend neu zu initialisieren. Zur Lokalisierung der Unstetigkeitsstellen wird nach jedem Integrationsschritt getestet, ob die vom Integrationsverfahren stetig verfolgte Nullstelle von $h(p,s)$ (Abb. 2 rechts) mit dem Kontaktpunkt $s(p)$ zusammenfällt, oder ob ein Kontaktpunktsprung aufgetreten ist ([4]).

Durch Simulationsläufe mit diesem Lösungsalgorithmus konnte geklärt werden, weshalb der Modellfehler des Ansatzes (1) bei Anwendung auf die bei den deutschen Bahnen verwendeten *Verschleißprofile* (Rad) sehr groß werden kann. Kontaktpunktsprünge treten hier nicht nur beim Flankenanlauf, sondern auch innerhalb der Lauffläche auf. Diese Kontaktpunktsprünge entstehen allein durch die Vernachlässigung der elastischen Deformation bei der geometrischen Beschreibung des Kontakts; ihnen entspricht *keine* unstetige physikalische Zustandsänderung. Als Alternative ersetzt man in (1) die Gleichungen $h(p,s) = 0$ durch $s = \hat{s}(p)$ mit $\hat{s}(p) \approx s(p)$. Im Reibgesetz wählt man entsprechend Parameter $\hat{\theta}(p) \approx \theta(s(p))$. Die Funktionen $\hat{s}$, $\hat{\theta}$ sind kubische Tensorproduktsplines, die s bzw. θ im gewichteten quadratischen Mittel bestmöglich approximieren. Für diesen Lösungsansatz gibt es erste positive Erfahrungen bei der Simulation des dynamischen Verhaltens eines Radsatzes.

Literatur

1 Arnold, M.; Netter, H.: Ein modifizierter Korrektor für die stabilisierte Integration differential-algebraischer Systeme mit von Hessenbergform abweichender Struktur. DLR Köln, IB 515–93–03, 1993.

2 Brenan, K.E.; Campbell, S.L.; Petzold, L.R.: Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. North Holland, Amsterdam New York Oxford, 1989.

3 Kalker, J.J.: Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact. Kluwer, Dorndrecht Boston London, 1990.

4 Netter, H.; Arnold, M.: Geometrie und Dynamik eines Rad–Schiene–Modells in Deskriptorform mit unstetigen Zustandsgrößen. DLR Köln, IB 515–93–02, 1993.

5 SIMEON, B.; FÜHRER, C.; RENTROP, P.: Differential-Algebraic Equations in Vehicle System Dynamics. Surveys on Mathematics for Industry. **1** (1991), 1–37.

Anschrift: ARNOLD, M., Universität Rostock, FB Mathematik, Postfach, D-18051 Rostock