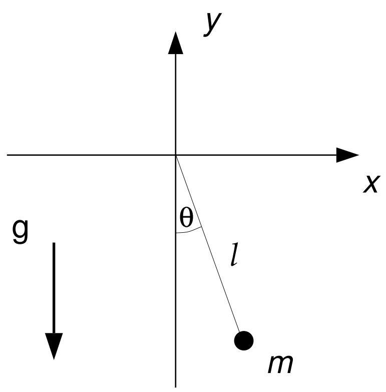
Schülerseminar, Herbst 2005
„Bewegungssimulation mit dem Computer“

Martin Arnold
Martin–Luther–Universität Halle–Wittenberg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Numerische Mathematik

7. Oktober 2005

Aufgabe 1 Mathematisches Pendel.

Sei $\theta(t)$ der Auslenkungswinkel einer an einem masselosen Faden der Länge l befestigten Punktmasse m, die sich unter dem Einfluss der Schwerkraft bewegt, vgl. Abbildung. Die Bewegung der Punktmasse wird nach dem Newtonschen Grundgesetz durch „Kraft = Masse × Beschleunigung“ beschrieben, wobei die Kraft durch die tangential zur Bewegungsbahn wirkende Komponente $F = F(m, g, \theta)$ der Gewichtskraft $-mg$ und die Beschleunigung durch die Tangentialbeschleunigung $l\ddot{\theta}$ gegeben sind.



a) Beweise $F(m, g, \theta) = -mg \sin\theta$ und

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l}\sin\theta(t)\,.$$

b) Wegen $\sin\theta = \theta - \theta^3/6 + \ldots$ kann man die Schwingungen des mathematischen Pendels bei kleinen Auslenkungen näherungsweise beschreiben durch

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l}\theta(t)\,.$$

Bestimme die Lösung dieser linearen Differentialgleichung 2. Ordnung für ein Pendel der Länge $l = 20.0\,\mathrm{cm}$, das sich bei einer Anfangsauslenkung von $\theta_0 = 5.0^\circ$ anfangs im Ruhezustand befindet (Umrechnung Grad- in Bogenmaß beachten).

c) Wie ändert sich die Lösung $\theta(t)$ aus b), wenn die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\theta}_0 = 1.0\,\mathrm{rad/s}$ beträgt?

d) Stelle die Lösung aus c) unter Verwendung des Additionstheorems

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi$$

in der Form $\theta(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ mit geeigneten Parametern ω, A, φ dar.

Aufgabe 2 Periodische Schwingung.

Beweise, dass die Funktion

$$x(t) = c_1 \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin \omega_1 t + c_2 \mathrm{e}^{-\alpha t} \cos \omega_1 t$$

für beliebige reelle Parameter $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

mit $\alpha^2 < \omega_0^2$ und

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

ist.