Schülerseminar, Herbst 2005
„Bewegungssimulation mit dem Computer“

Martin Arnold
Martin–Luther–Universität Halle–Wittenberg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Numerische Mathematik

6. Oktober 2005

Aufgabe 1 Interpolationspolynom.
Beweise, dass die quadratische Funktion

$$p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

die drei *Interpolationsbedingungen*

$$p_2(x_0) = f(x_0)\,, \;\; p_2(x_1) = f(x_1)\,, \;\; p_2(x_2) = f(x_2)$$

erfüllt.

Aufgabe 2 Satz von Taylor.
Aus dem Satz von Taylor erhält man folgende Näherungsformeln zur Berechnung von $f(x) = \cos x$:

$$\begin{aligned}\cos x &\approx p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}\,,\\ \cos x &\approx p_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\,.\end{aligned}$$

Berechne für $x = 10^{-3}$, für $x = 10^{-2}$, für $x = 10^{-1}$, für $x = 1$ und für $x = 10$ jeweils die *Approximationsfehler*

$$|\cos x - p_2(x)| \quad \text{und} \quad |\cos x - p_4(x)|\,.$$

Hinweise: Es ist nützlich, bei der Lösung dieser Aufgabe den Taschenrechner oder Matlab zu verwenden. Beachte bei Benutzung des Taschenrechners, dass x im Bogenmaß gegeben ist. Bei Benutzung von Matlab ist der Befehl `logspace(-3,1,5)` hilfreich, vgl. hierzu die Online–Hilfe in Matlab:

```
>> help logspace
```

Aufgabe 3 Energieerhaltung.

Gegeben sei ein Körper der Masse m, der sich im Gravitationsfeld der Erde entlang eines vom Erdmittelpunkt ausgehenden Strahls bewegt. Aus dem Newtonschen Grundgesetz „Kraft = Masse × Beschleunigung" ergibt sich für den Abstand $r(t)$ zwischen Körper und Erdmittelpunkt die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{r}(t) = -\frac{\gamma M}{r^2(t)} \tag{$*$}$$

mit der Gravitationskonstante γ und der Erdmasse M.

Die kinetische und die potentielle Energie des Körpers sind gegeben durch

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}\dot{r}^2(t)\,, \quad E_{\text{pot}} = -\frac{\gamma m M}{r(t)}\,.$$

Beweise unter Verwendung der Kettenregel und der Bewegungsgleichung $(*)$, dass die Gesamtenergie

$$E = E(r(t), \dot{r}(t)) = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{m}{2}\dot{r}^2(t) - \frac{\gamma m M}{r(t)}$$

während der Bewegung konstant bleibt, d. h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(r(t), \dot{r}(t)) = 0\,.$$