Schülerseminar, Herbst 2005
„Bewegungssimulation mit dem Computer“

Martin Arnold
Martin–Luther–Universität Halle–Wittenberg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Numerische Mathematik

4. Oktober 2005

Aufgabe 1 Implizite Differentiation.
Gegeben seien die Funktionen $u(x) := \sin x$, $w(x) := \cos x$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $y(x) := u^2(x) + w^2(x) = 1$, d. h.,

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = 0\,. \tag{$*$}$$

Stelle $y'(x)$ unter Verwendung von Summen- und Produktregel als Funktion von $u(x)$, $w(x)$, $u'(x)$ und $w'(x)$ dar und zeige, dass mit $u'(x) = \cos x$ die Ableitung $w'(x)$ direkt aus $(*)$ abgelesen werden kann.

Aufgabe 2 Logistisches Wachstum.
Gegeben sei die Funktion

$$P(t) = \frac{P_{\max}}{1 + \left(\dfrac{P_{\max}}{P_0} - 1\right) \mathrm{e}^{-\alpha P_{\max} t}}\,.$$

a) Berechne $P(0)$.
b) Bestimme $\dot{P}(t)$ unter Verwendung der Quotientenregel mit

$$u(t) := P_{\max}\,, \quad v(t) := 1 + \left(\frac{P_{\max}}{P_0} - 1\right) \mathrm{e}^{-\alpha P_{\max} t}\,.$$

c) Beweise $\dot{P}(t) = \alpha\, P(t)\,(P_{\max} - P(t))\,.$
d) Stelle $P(t)$ für $t \in [0, 8.0_{\mathrm{E}}+5]$, $P_0 = 1.0_{\mathrm{E}}+6$, $P_{\max} = 2.0_{\mathrm{E}}+6$, $\alpha = 5.0_{\mathrm{E}}-12$ graphisch dar.

Aufgabe 3 Bewegungssimulation: Euler-Heun-Verfahren.
Wirkt auf einen Massepunkt m mit der Höhenauslenkung y und der vertikalen Geschwindigkeit $v = \dot{y}$ zum Zeitpunkt t eine Kraft $F = F(t, y, v)$, so gilt

$$\dot{v}(t) = f(t, y, v) := F(t, y, v)/m$$

und das Euler–Heun–Verfahren ist gegeben durch

$$\left.\begin{array}{rcl} \bar{y}_{n+1} & := & y_n + \mathtt{dt} * v_n \\ \bar{v}_{n+1} & := & v_n + \mathtt{dt} * f(t_n, y_n, v_n) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} y_{n+1} & := & y_n + \mathtt{dt} * (v_n + \bar{v}_{n+1})/2 \\ v_{n+1} & := & v_n + \mathtt{dt} * (f(t_n, y_n, v_n) + f(t_{n+1}, \bar{y}_{n+1}, \bar{v}_{n+1}))/2 \end{array}\right\}$$

Fährt ein gummibereiftes Fahrzeug mit konstanter Fahrgeschwindigkeit v_0 über einen Fahrweg mit der Höhenauslenkung $h(x)$, so kann seine Höhenauslenkung stark vereinfacht durch die Höhenauslenkung eines Massepunkts beschrieben werden, auf den die Gewichtskraft $G = -mg$ und die der Gewichtskraft entgegengesetzte Kraft

$$F_0 - k\big(y(t) - h(x(t))\big) - d\big(v(t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h(x(t))\big)$$

(„Reifenkraft“) wirken. Berechnen Sie für die Modellparameter

$$y(0) = 0\,\mathrm{m}, \quad v(0) = 0\,\frac{\mathrm{m}}{s}, \quad v_0 = 2.0\,\frac{\mathrm{m}}{s}, \quad m = 285\,\mathrm{kg}, \quad k = 10^6\,\frac{\mathrm{N}}{m}, \quad d = 10^2\,\frac{\mathrm{Ns}}{m}, \quad F_0 = G$$

die Bewegung $y(t)$ des Massepunkts im Zeitintervall $[\,0\,\mathrm{s},\, 10\,\mathrm{s}\,]$ mit dem Euler–Heun–Verfahren und einer geeigneten Schrittweite `dt`

a) für den Fahrweg

$$h(x) = x_{\max} \sin(\frac{2\pi x}{L}), \quad x_{\max} = 0.1\,\mathrm{m}, \quad L = 2.0\,\mathrm{m},$$

b) für den Fahrweg $h(x)$, der in der Datei `h.dat` punktweise definiert wird (Spalte 1: x, Spalte 2: $h(x)$). Die Datei `h.dat` ist über die website des Seminars erreichbar und muss lokal abgespeichert werden. Laden in Matlab mit dem Befehl

```
h = load('h.dat');
```