Schülerseminar, Herbst 2005
„Bewegungssimulation mit dem Computer“

Martin Arnold
Martin–Luther–Universität Halle–Wittenberg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Numerische Mathematik

3. Oktober 2005

Aufgabe 1 Produktregel.
Beweise mit der Produktregel

$$\frac{\mathrm{d}(u^2(x))}{\mathrm{d}x} = 2u(x)u'(x)$$

und verwende dies zum Nachweis, dass $u(x) = \sqrt{x}$ die (in Beispiel 2.8 schon auf andere Weise hergeleitete) Ableitung $u'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ hat.

Aufgabe 2 Bernoullische Ungleichung.
a) Beweise für $0 < a < 1$

$$1 - a < \frac{1}{1+a} .$$

b) Wir setzen voraus, dass für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ und für jedes $a \in (0,1)$ die Abschätzungen

$$1 - na \leq (1-a)^n \leq \frac{1}{1+na}$$

gelten. Beweise unter dieser Voraussetzung die Abschätzungen

$$1 - (n+1)a < (1-a)^{n+1} < \frac{1}{1+(n+1)a} .$$

Aufgabe 3 Eulersche Zahl e.
Als Ergebnis von Aufgabe 2 setzen wir voraus ($a = 1/n^2$)

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < (1 - \frac{1}{n^2})^n < \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} , \quad (n \geq 2)$$

und betrachten die Zahlenfolgen

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n , \quad b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} .$$

Beweise

a) $a_{n-1} < a_n\,, \quad (\,n \geq 2\,),$

b) $b_{n-1} > b_n\,, \quad (\,n \geq 2\,),$

c) $b_n - a_n \leq 4/n\,, \quad (\,n \geq 1\,).$

Ergebnis: $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < \mathrm{e} < \ldots < b_3 < b_2 < b_1$ und

$$|\mathrm{e} - \frac{a_n + b_n}{2}| < \frac{4}{n}\,.$$

Aufgabe 4 „Unendlich kleine“ Terme.

a) Beweise für $k \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}\,.$$

Hinweis: Beweise zunächst für $r \geq 1$: $\displaystyle\sum_{i=2^{r-1}+1}^{2^r} \frac{1}{i} \geq \frac{1}{2}\,.$

b) Beweise für $k \geq 1$ mit ähnlichen Überlegungen wie in a)

$$\sum_{i=1}^{2^k-1} \frac{1}{i^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{(2^k-1)^2} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}}\,.$$

c) Beweise für $k \geq 1$

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}})(1 - \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2^k}\,.$$

Ergebnis: Die Folge $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^k-1} \frac{1}{i^2}$ ist nach oben beschränkt durch $1/(1-\frac{1}{2}) = 2\,.$

Aufgabe 5 Ableitung von Winkelfunktionen.

a) Wie lautet das Additionstheorem für $\cos(\alpha + \beta)$?

b) Beweise für $y(x) = \cos x$ in Anlehnung an Bemerkung 2.12

$$y'(x) = -\sin x\,.$$