Schülerseminar, Herbst 2005
„Bewegungssimulation mit dem Computer“

Martin Arnold
Martin–Luther–Universität Halle–Wittenberg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Numerische Mathematik

1. Oktober 2005

Aufgabe 1 Differentiation.

Beweisen Sie unter Verwendung der Produktregel, dass für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, die Ableitung von $y(x) = x^n$ gegeben ist durch $y'(x) = nx^{n-1}$, sofern $u'(x) = (n-1)x^{n-2}$ die Ableitung von $u(x) = x^{n-1}$ ist.

Aufgabe 2 Erweiterte Produktregel.

Beweisen Sie

$$y = u \cdot v \cdot w \quad \Rightarrow \quad y' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w' \,.$$

Aufgabe 3 Freier Fall: Numerische Lösung.

Im freien Fall mit Anfangshöhe $y_0 = 0$ gilt

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 \quad \text{mit} \quad g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

a) Berechnen Sie im Zeitintervall $[0,2]$ ausgehend von $t_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_0 = 0$ schrittweise Näherungslösungen $y_n \approx y(t_n)$, $v_n \approx v(t_n)$ für $t_n = 0$, $\mathtt{dt}$, $2 * \mathtt{dt}$, … mit

$$\left.\begin{array}{rcl} y_{n+1} & := & y_n + \mathtt{dt} * v_n \\ v_{n+1} & := & v_n - \mathtt{dt} * g \end{array}\right\}$$

(*Euler–Verfahren*) und vergleichen Sie sie mit der analytischen Lösung

$$y(t_n) = -\frac{g}{2}t_n^2\,, \quad v(t_n) = -gt_n\,.$$

b) Geben Sie für die nach a) berechnete Näherungslösung (y_n, v_n) für $\mathtt{dt} = 1.0$, für $\mathtt{dt} = 0.5$ und für $\mathtt{dt} = 0.25$ jeweils den maximalen Fehler $|y_n - y(t_n)| + |v_n - v(t_n)|$ mit $t_n \in [0,2]$ an.

c) Berechnen Sie mit dem verbesserten numerischen Verfahren

$$\left.\begin{array}{rcl} \bar{y}_{n+1} & := & y_n + \mathtt{dt} * v_n \\ \bar{v}_{n+1} & := & v_n - \mathtt{dt} * g \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} y_{n+1} & := & y_n + \mathtt{dt} * (v_n + \bar{v}_{n+1})/2 \\ v_{n+1} & := & v_n - \mathtt{dt} * g \end{array}\right\}$$

(*Euler–Heun–Verfahren*) die numerischen Lösungen für $\mathtt{dt} = 1.0$ und für $\mathtt{dt} = 0.5$, und geben Sie auch hier den maximalen Fehler $|y_n - y(t_n)| + |v_n - v(t_n)|$ mit $t_n \in [0,2]$ an.