L^2-Fehlerabschätzungen

Definition 5.49: Adjungierte Randwertaufgabe.

Die zu (5.4)/(5.7) *adjungierte Randwertaufgabe* ist definiert durch die Bilinearform

$$(u,v) \mapsto a(v,u) \quad \text{für} \quad u,v \in V := \{\, v \in H^1(\Omega) \,:\, v = 0 \text{ auf } \Gamma_3 \,\}\,.$$

Sie heißt *regulär*, wenn zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $u = u_f \in V$ von

$$a(v,u) \;= < f, v >_0\,, \quad (\, v \in V\,) \tag{5.11}$$

existiert und $u_f \in H^2(\Omega)$ sowie $|u_f|_2 \le C\|f\|_0$ mit einer Konstanten $C > 0$ erfüllt.

Satz 5.50: Satz von Aubin und Nitsche (1967/68).

Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 5.47 sei das adjungierte Randwertproblem zu (5.4)/(5.7) regulär. Dann gilt für die Galerkin–Lösung:

a) $\|u - u_h\|_0 \le C\,h\,\|u - u_h\|_1\,,$

b) $\|u - u_h\|_0 \le C\,h\,\|u\|_1\,,$

c) $\|u - u_h\|_0 \le C\,h^{k+1}\,|u|_{k+1}\,,$ falls $u \in H^{k+1}(\Omega)$.