Satz 5.22: Eindeutige Lösbarkeit: allgemeiner Fall

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz–Gebiet. Unter der Voraussetzung (5.5) besitzt das Randwertproblem (5.4)/(5.7) mit $g_3 \equiv 0$ und

$$k_{ij},\ c_i,\ \nabla\cdot c,\ r \in L^\infty(\Omega),\ f \in L^2(\Omega),\ g_l \in L^2(\Gamma_l),\ \alpha \in L^\infty(\Gamma_2),\ \nabla\cdot c \in L^\infty(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$$

genau eine schwache Lösung $u \in V$, wenn gilt:

(a) $r - \frac{1}{2}\nabla\cdot c \geq 0$ in Ω,

(b) $\nabla\cdot c \geq 0$ auf Γ_1,

(c) $\alpha + \frac{1}{2}\nabla\cdot c \geq 0$ auf Γ_2

(d) und eine der folgenden Bedingungen zusätzlich erfüllt ist:

- (i) $|\Gamma_3|_{d-1} > 0$,
- (ii) es gibt ein $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ mit $|\tilde{\Omega}|_d > 0$ und $r_0 > 0$, so daß $r - \frac{1}{2}\nabla\cdot c \geq r_0$ auf $\tilde{\Omega}$,
- (iii) es gibt ein $\tilde{\Gamma}_1 \subset \Gamma_1$ mit $|\tilde{\Gamma}_1|_{d-1} > 0$ und $c_0 > 0$, so daß $\nabla\cdot c \geq c_0$ auf $\tilde{\Gamma}_1$,
- (iv) es gibt ein $\tilde{\Gamma}_2 \subset \Gamma_2$ mit $|\tilde{\Gamma}_2|_{d-1} > 0$ und $\alpha_0 > 0$, so daß $\alpha + \frac{1}{2}\nabla\cdot c \geq \alpha_0$ auf $\tilde{\Gamma}_2$.