

Definition 5.3: Sobolevräume $H^k(\Omega)$, $W_p^k(\Omega)$.

a) $H^k(\Omega) := \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : v \in L^2(\Omega), \text{ für alle Multiindizes } \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq k$
existieren schwache Ableitungen $\partial^\alpha v$ und $\partial^\alpha v \in L^2(\Omega)\}$

Skalarprodukt $\langle v, w \rangle_k := \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha v \partial^\alpha w \, dx$

Norm $\|v\|_k := \langle v, v \rangle_k^{1/2}$
 $= \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha v|^2 \, dx \right)^{1/2} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha v\|_0^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{l=0}^k |v|_l^2 \right)^{1/2}$

mit Halbnormen $|v|_l := \left(\sum_{|\alpha|=l} \|\partial^\alpha v\|_0^2 \right)^{1/2}$.

b) $W_p^k(\Omega) := \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : v \in L^p(\Omega), \text{ für alle Multiindizes } \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq k$
existieren schwache Ableitungen $\partial^\alpha v$ und $\partial^\alpha v \in L^p(\Omega)\}$

Norm $\|v\|_{k,p} := \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha v|^p \, dx \right)^{1/p}$, Spezialfall: $H^k(\Omega) = W_2^k(\Omega)$.

