Bemerkung 4.34: Elementweise Assemblierung

Steifigkeitsmatrix

$$(A_h)_{ij} = \int_\Omega \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i \,\mathrm{d}x = \sum_{m=1}^{N} A_{ij}^{(m)} \quad \text{mit} \quad A_{ij}^{(m)} = \int_{K_m} \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i \,\mathrm{d}x$$

Es gilt $A_{ij}^{(m)} \neq 0 \Rightarrow a_i, a_j \in K_m$.

Elementweiser Aufbau von $(A_h)_{ij}$ mittels Elementsteifigkeitsmatrizen:

$$(A_{r_i r_j}^{(m)})_{i,j=1,2,3} = (\tilde{A}_{ij}^{(m)})_{i,j=1,2,3} \quad \text{mit} \quad \tilde{A}_{ij}^{(m)} = \int_{K_m} \nabla\varphi_{r_j} \cdot \nabla\varphi_{r_i} \,\mathrm{d}x$$

Transformation des Referenzdreiecks $\widehat{K}$ auf K_m mittels $F(\hat{x}) = B\hat{x} + d$:

$$D_{\hat{x}} u(F(\hat{x})) = D_x u(F(\hat{x})) D_{\hat{x}} F(\hat{x}) = D_x u(F(\hat{x})) B$$

Unter Verwendung von $D_x u = (\partial_1 u, \partial_2 u) = (\nabla u)^T$ ergibt sich:

$$\nabla_x u(F(\hat{x})) = B^{-T} \nabla_{\hat{x}} (u(F(\hat{x})))$$

$$\tilde{A}_{ij}^{(m)} = \int_{K_m} \nabla\varphi_{r_j}(x) \cdot \nabla\varphi_{r_i}(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\widehat{K}} \nabla_x \varphi_{r_j}(F(\hat{x})) \cdot \nabla_x \varphi_{r_i}(F(\hat{x})) \,|\det(DF(\hat{x}))| \,\mathrm{d}\hat{x}$$