Beispiel 2.5: Inhomogene Randbedingungen

b) Lösung des inhomogenen Problems mit homogenen AB und RB:

„Variation der Konstanten" $\bar{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x \quad \text{mit} \quad \alpha_n(0) = 0$ (homogene AB)

Einsetzen in $\bar{u}_t - k\,\bar{u}_{xx} = f$ führt mit geeigneten Glattheitsvoraussetzungen auf

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\dot{\alpha}_n(t) + k \, (\frac{n\pi}{L})^2 \, \alpha_n(t) \Big) \, \sin \frac{n\pi}{L} x \; = \; f(x,t)$$

Nutze die Orthogonalität der Eigenfunktionen:

$$\int_0^L \sin \frac{m\pi}{L} \xi \cdot \; \ldots \; \mathrm{d}\xi \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{2} \Big(\dot{\alpha}_m(t) + k \, (\frac{m\pi}{L})^2 \, \alpha_m(t) \Big) = \int_0^L f(\xi,t) \sin \frac{m\pi}{L} \xi \, \mathrm{d}\xi$$

Formale Lösung dieser inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$\alpha_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^t e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 (t-\tau)} \Big(\int_0^L f(\xi,\tau) \sin \frac{n\pi}{L} \xi \, \mathrm{d}\xi \Big) \, \mathrm{d}\tau$$

$$\boxed{\bar{u}(x,t) = \int_0^t \int_0^L \; \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 (t-\tau)} \sin \tfrac{n\pi}{L} x \cdot \sin \tfrac{n\pi}{L} \xi \cdot f(\xi,\tau) \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau}$$