Bemerkung 4.8: Trigonometrische Polynome

Gilt $\phi_N(t) \in \mathbb{R}$, $(t \in \mathbb{R})$, für das (komplexe) trigonometrische Polynom

$$\phi_N(t) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j \mathrm{e}^{ijt}$$

so gilt $\phi_N \in T_R^N$ mit $a_j = 2\,\mathrm{Re}\, c_j = c_j + c_{N-j}$, $b_j = -2\,\mathrm{Im}\, c_j = i\,(c_j - c_{N-j})$.

Beweis

Für die N äquidistanten Knoten $t_k = k \cdot 2\pi/N$, $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$ gilt

$$\mathrm{e}^{-ijt_k} = \underbrace{\mathrm{e}^{iNk\cdot 2\pi/N}}_{=1} \cdot \mathrm{e}^{-ijt_k} = \mathrm{e}^{i(N-j)t_k}$$

und

$$\sum_{j=0}^{N-1} c_j \mathrm{e}^{ijt_k} = \phi_N(t_k) = \overline{\phi_N(t_k)} = \sum_{j=0}^{N-1} \overline{c_j}\, \mathrm{e}^{-ijt_k} = \sum_{j=0}^{N-1} \overline{c_j}\, \mathrm{e}^{i(N-j)t_k} = \sum_{l=1}^{N} \overline{c_{N-l}}\, \mathrm{e}^{ilt_k}$$

$\Rightarrow \quad c_j = \overline{c_{N-j}}$, da Interpolationsaufgabe eindeutig lösbar.