

Fehlerschranke hängt linear ab von $\max_{i,k} |l_{ik}|$.

Spaltenpivotisierung: $|l_{ik}| \leq 1 \rightsquigarrow$ kleine Fehlerschranke

Numerische Stabilität: numerische Lösung \tilde{x} erfüllt

$$(A + \delta_A)\tilde{x} = b$$

mit

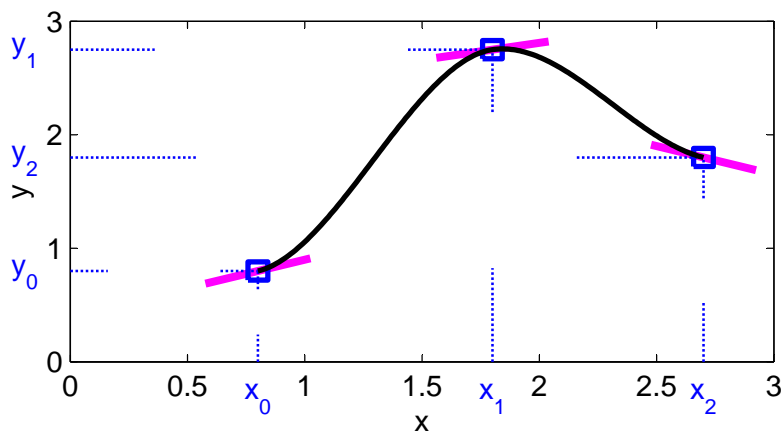
$$\frac{\|\delta_A\|_\infty}{\|A\|_\infty} \leq 8n^3 \cdot \frac{\max_{i,j,k} |a_{ij}^{(k)}|}{\max_{i,j} |a_{ij}|} \varepsilon.$$

4 Interpolation (II)

Bemerkung 4.1 (Stückweise Hermite-Interpolation)

geg.: $r + 1$ Stützstellen x_0, x_1, \dots, x_r

Stützwerte (y_k, y'_k) , $(k = 0, 1, \dots, r)$



Definiert man die interpolierende Funktion Φ stückweise durch Hermite-Interpolationspolynome $\Phi|_{[x_{i-1}, x_i]}$, $(i = 1, \dots, r)$ mit Interpolationsbedingungen

$$\Phi(x_{i-1}) = y_{i-1}, \quad \Phi'(x_{i-1}) = y'_{i-1}, \quad \Phi(x_i) = y_i, \quad \Phi'(x_i) = y'_i, \quad (i = 1, \dots, r),$$

so ist $\Phi \in C^1[a, b]$, aber $\deg \Phi|_{[x_{i-1}, x_i]} \leq 3$.

4.1 Spline-Interpolation

Bemerkung 4.2 (Kubische Spline-Interpolation)

Kubische Splines erreichen ähnlich wie zusammengesetzte Hermite-Interpolierende eine hohe globale Glattheit, jedoch mit deutlich niedrigerem Polynomgrad:

$$s \in C^2[a, b], \quad s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \Pi_3.$$

Splines der *Ordnung* k : $s \in C^{k-2}[a, b]$, $s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \Pi_{k-1}$.

Splinegitter $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Zum kubischen Spline s ist

$$s|_{[x_i, x_{i+1}]} = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

\Rightarrow insgesamt $4n$ Parameter (a_i, b_i, c_i, d_i) , $(i = 0, 1, \dots, n-1)$.

$n + 1$ Interpolationsbedingungen $s(x_i) = y_i \Rightarrow a_i = y_i$, $(i = 0, 1, \dots, n-1)$,

$$s(x_n) = y_n \Rightarrow a_{n-1} + b_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + \frac{c_{n-1}}{2}(x_n - x_{n-1})^2 + \frac{d_{n-1}}{6}(x_n - x_{n-1})^3 = y_n =: a_n.$$

$3(n - 1)$ Stetigkeitsbedingungen

$$s(x_{i+1} - 0) = s(x_{i+1} + 0) : \quad a_i + b_i h_i + \frac{c_i}{2} h_i^2 + \frac{d_i}{6} h_i^3 = a_{i+1}, \quad (i = 0, 1, \dots, n-2)$$

$$s'(x_{i+1} - 0) = s'(x_{i+1} + 0) : \quad b_i + c_i h_i + \frac{d_i}{2} h_i^2 = b_{i+1}, \quad (i = 0, 1, \dots, n-2)$$

$$s''(x_{i+1} - 0) = s''(x_{i+1} + 0) : \quad c_i + d_i h_i = c_{i+1}, \quad (i = 0, 1, \dots, n-2)$$

mit *Schrittweiten* $h_i := x_{i+1} - x_i$, $(i = 0, 1, \dots, n-1)$.

\Rightarrow insgesamt $4n - 2$ lineare Bedingungen an $4n$ Parameter

Zusatzbedingungen

(i) $s''(x_0) = s''(x_n) = 0 \dots$ natürlicher kubischer Spline

oder

(ii) $s'(x_0) = y'_0$, $s'(x_n) = y'_n \dots$ vollständiger kubischer Spline

oder

(iii) $s'(x_0) = s'(x_n)$, $s''(x_0) = s''(x_n) \dots$ periodischer kubischer Spline, für periodische Daten ($y_0 = y_n$) $\Rightarrow s(x_0) = s(x_n)$.

In jedem der drei Fälle ist die Splinefunktion eindeutig bestimmt.

Berechnung der Koeffizienten

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{h_i},$$

$$b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{c_i}{2} h_i - \frac{d_i}{6} h_i^2 = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2c_i + c_{i+1}}{6} h_i$$

Stetigkeitsbedingung für $s'(x) \Rightarrow (i = 0, 1, \dots, n-2)$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2c_i + c_{i+1}}{6} h_i + c_i h_i + \frac{c_{i+1} - c_i}{2} h_i = \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{2c_{i+1} + c_{i+2}}{6} h_{i+1}$$

$$\frac{h_i}{6} c_i + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} c_{i+1} + \frac{h_{i+1}}{6} c_{i+2} = \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$$

Zusammen mit $c_0 = c_n = 0$ ergibt sich für den natürlichen kubischen Spline ein tridiagonales lineares Gleichungssystem der Dimension $n - 1$ zur Bestimmung von c_1, \dots, c_{n-1} \Rightarrow Gaußscher Algorithmus erfordert $\mathcal{O}(n)$ Rechenoperationen. Analoges Vorgehen für vollständigen und periodischen Spline.

Algorithmus 1 Bestimmung der Splinekoeffizienten.

1. $a_i := y_i, (i = 0, 1, \dots, n - 1)$
2. Berechne c_0, c_1, \dots, c_n als Lösung eines tridiagonalen Gleichungssystems.
3. Bestimme $b_i, d_i, (i = 0, 1, \dots, n - 1)$.

Algorithmus 2 Auswertung der Splinefunktion.

1. Bestimme Teilintervall (binäre Suche)

```

i := 0, ī := n
repeat
  i* := ⌊  $\frac{i + \bar{i}}{2}$  ⌋
  if  $x \geq x_{i^*}$  then i := i* else ī := i*
until  $\bar{i} - i \leq 1$ 
i := i

```

Einfachster Spezialfall: äquidistantes Gitter $x_i = a + ih$ mit $h = \frac{b - a}{n}$

$$\Rightarrow i := \left\lceil \frac{x - a}{h} \right\rceil$$

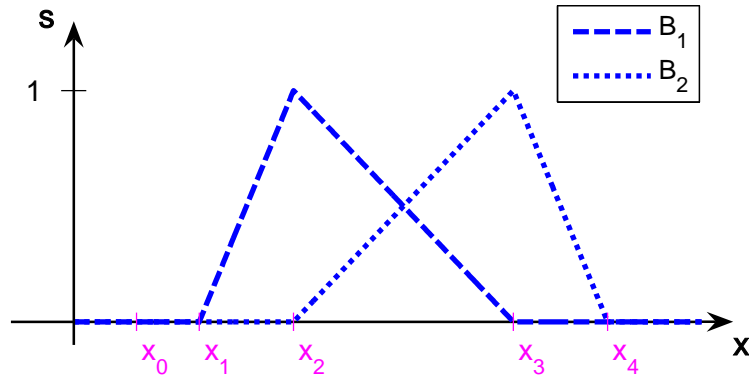
2. Splineauswertung $s(x) = a_i + (x - x_i)(b_i + (x - x_i)(\frac{1}{2}c_i + \frac{1}{6}d_i(x - x_i)))$

Bemerkung 4.3 (B-Splines)

Idee Darstellung der Splinefunktion als Linearkombination „einfacher“ Basisfunktionen des Vektorraums der Splinefunktionen \rightsquigarrow B-Splines.

Beispiel $k = 2$: stetige, stückweise lineare Funktion

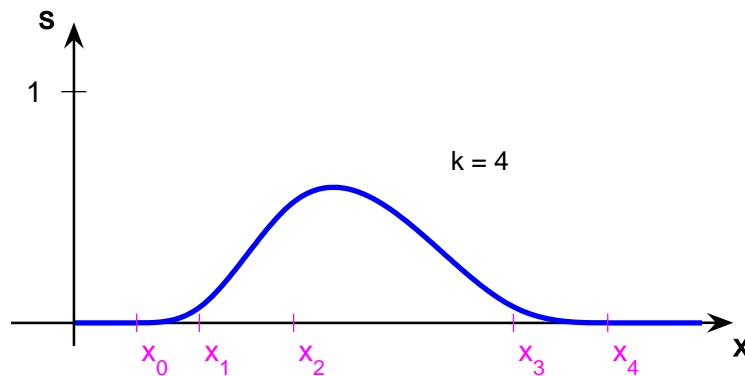
$$B_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}, & (x \in [x_j, x_{j+1}]), \\ \frac{x - x_{j+2}}{x_{j+1} - x_{j+2}}, & (x \in [x_{j+1}, x_{j+2}]), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Interpolierender linearer Spline $s(x) = \sum_{j=0}^n y_j B_{j-1}(x)$.

- allgemein**
- $B_j|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \Pi_{k-1}$, ($i = 0, 1, \dots, n-1$)
 - $B_j \in C^{k-2}[a, b]$
 - $\sum_j B_j(x) = 1$, ($x \in [a, b]$)
 - $\text{supp } B_j = [x_j, x_{j+k}]$, d. h. $B_j(x) = 0$, ($x \leq x_j$ oder $x \geq x_{j+k}$)

Beispiel Kubischer B-Spline



Bestimmung der Koeffizienten α_j des interpolierenden Splines $\sum_j \alpha_j B_j(x)$ als Lösung eines linearen Gleichungssystems der Bandbreite $k-1$.

Satz 4.4 (Approximationseigenschaften kubischer Splines)

Gegeben sei eine Funktion $f \in C^4[a, b]$ mit $\max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| \leq M$ sowie ein Gitter

$$\Delta = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \}$$

mit Schrittweiten $h_i := x_{i+1} - x_i$, ($i = 0, 1, \dots, n-1$) und einer Konstanten

$$K \geq \max_{0 \leq i \leq n-1} h_i / \min_{0 \leq i \leq n-1} h_i.$$

Dann gibt es zum vollständigen interpolierenden kubischen Spline s_Δ Konstanten C_0, C_1, C_2 und C_3 , die von Δ und K unabhängig sind und für die gilt

$$|f^{(k)}(x) - s_\Delta^{(k)}(x)| \leq C_k MK \left(\max_{0 \leq i \leq n-1} h_i \right)^{4-k}, \quad (x \in [a, b], k = 0, 1, 2, 3)$$

in jedem Punkt x , in dem $s_\Delta^{(k)}(x)$ definiert ist.

Beweisidee (i) $f(x_i) = s_\Delta(x_i)$ für Stützstellen x_i

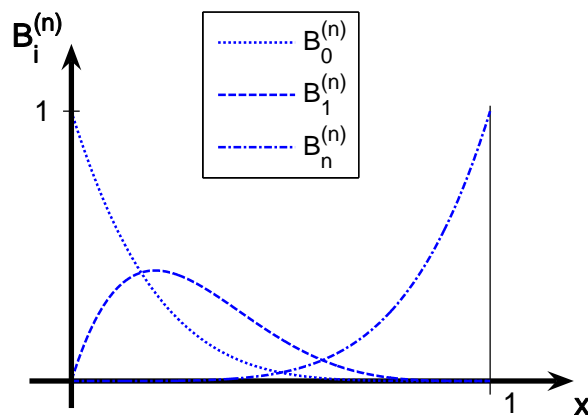
(ii) Abschätzung von $|f''(x_i) - s_\Delta''(x_i)|$ durch Einsetzen von f in das Gleichungssystem aus Bemerkung 4.2

(iii) Hieraus Abschätzungen für $x \neq x_i$. ■

Bemerkung 4.5 (Bernstein–Polynome und Bezier–Kurven)

a) Bernstein–Polynome

$$B_i^{(n)}(x) = \binom{n}{i} (1-x)^{n-i} x^i, \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$



Eigenschaften

a) i -fache Nullstelle $x = 0$, $(n - i)$ -fache Nullstelle $x = 1$

b) $B_i^{(n)} \Big|_{[0,1]} \geq 0$

c) $\sum_{i=0}^n B_i^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-x)^{n-i} x^i = ((1-x) + x)^n = 1$

d) $B_i^{(n)}(x) = x \cdot B_{i-1}^{(n-1)}(x) - B_i^{(n-1)}(x)$

b) Bezier-Kurve

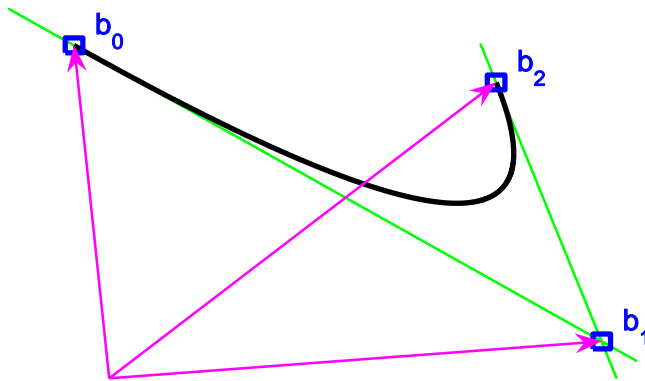
geg.: Kontrollpunkte $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^k$

Bezierkurve im \mathbb{R}^k : $\sum_{i=0}^n b_i B_i^{(n)}(x), (x \in [0, 1])$.

- Anfangspunkt b_0 , Endpunkt b_n
- Tangente in b_0 verläuft durch b_1 , denn

$$\frac{d}{dx} B_0^{(n)}(0) = -n, \quad \frac{d}{dx} B_1^{(n)}(0) = n, \quad \frac{d}{dx} B_i^{(n)}(0) = 0, \quad (i > 1)$$

- $n = 2$: Tangenten in b_0 und b_2 schneiden sich in b_1
- Kurve verläuft in der konvexen Hülle des von den b_i gebildeten Polygons
 \Rightarrow keine unerwünschten Oszillationen



4.2 Trigonometrische Interpolation – Schnelle Fouriertransformation

Bemerkung 4.6 (Problemstellung)

Interpolation periodischer Daten durch trigonometrische Polynome.

$N = 2n + 1$ ungerade

$$T_R^N := \left\{ \phi_{2n+1}(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n (a_j \cos jt + b_j \sin jt) \text{ mit } a_j, b_j \in \mathbb{R}, (j = 0, \dots, n) \right\}$$

$N = 2n$ gerade

$$T_R^N := \left\{ \phi_{2n}(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} (a_j \cos jt + b_j \sin jt) + \frac{a_n}{2} \cos nt \text{ mit } a_j, b_j \in \mathbb{R}, (j = 0, \dots, n) \right\}$$

Komplexe Darstellung

$$T_C^N := \left\{ \phi_N(t) := \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{ijt} : c_j \in \mathbb{C}, (j = 0, \dots, N-1) \right\}$$

Ansatzfunktionen $\{1, \cos jt, \sin jt\}$ bzw. $\{e^{ijt} : 0 \leq j \leq N-1\}$ sind linear unabhängig \rightsquigarrow Interpolationsaufgabe zu N Stützpunkten (t_k, f_k) , $(k = 0, 1, \dots, N-1)$ eindeutig lösbar.

Typische Aufgabenstellung Digitale Signalverarbeitung, Datenerfassung im festen Takt \Rightarrow äquidistante Knoten, normiert auf $t_k = k \cdot 2\pi/N$.

Bemerkung 4.7 (Trigonometrische Interpolation auf äquidistantem Gitter)

Zu $t_k = k \cdot 2\pi/N$, $(k = 0, 1, \dots, N-1)$ sind $\omega_k := e^{it_k} = e^{ik \cdot 2\pi/N}$ die N -ten Einheitswurzeln.

Interpolationsbedingungen $\phi_N(t_k) = f_k$, $(k = 0, 1, \dots, N-1)$ bestimmen ϕ_N mit

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega_0 & \omega_0^2 & \cdots & \omega_0^{N-1} \\ 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \cdots & \omega_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_{N-1} & \omega_{N-1}^2 & \cdots & \omega_{N-1}^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 4.8 (Komplexe und reelle trigonometrische Polynome)

Gilt für das (komplexe) trigonometrische Polynom

$$\phi_N(t) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{ijt}$$

$\phi_N(t) \in \mathbb{R}$, $(t \in \mathbb{R})$, so gilt $\phi_N \in T_R^N$ mit

$$a_j = 2 \operatorname{Re} c_j = c_j + c_{N-j}, \quad b_j = -2 \operatorname{Im} c_j = i(c_j - c_{N-j}).$$

Beweis Für die N äquidistanten Knoten $t_k = k \cdot 2\pi/N$, $(k = 0, 1, \dots, N-1)$ gilt

$$e^{-ijt_k} = \underbrace{e^{iNk \cdot 2\pi/N}}_{=1} \cdot e^{-ijt_k} = e^{i(N-j)t_k}$$

und

$$\sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{ijt_k} = \phi_N(t_k) = \overline{\phi_N(t_k)} = \sum_{j=0}^{N-1} \overline{c_j} e^{-ijt_k} = \sum_{j=0}^{N-1} \overline{c_j} e^{i(N-j)t_k} = \sum_{l=1}^N \overline{c_{N-l}} e^{ilt_k}$$

Bemerkung 4.8: Trigonometrische Polynome

Gilt $\phi_N(t) \in \mathbb{R}$, ($t \in \mathbb{R}$), für das (komplexe) trigonometrische Polynom

$$\phi_N(t) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{ijt}$$

so gilt $\phi_N \in T_R^N$ mit $a_j = 2 \operatorname{Re} c_j = c_j + c_{N-j}$, $b_j = -2 \operatorname{Im} c_j = i(c_j - c_{N-j})$.

Beweis

Für die N äquidistanten Knoten $t_k = k \cdot 2\pi/N$, ($k = 0, 1, \dots, N-1$) gilt

$$e^{-ijt_k} = \underbrace{e^{iNk \cdot 2\pi/N}}_{=1} \cdot e^{-ijt_k} = e^{i(N-j)t_k}$$

und

$$\sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{ijt_k} = \phi_N(t_k) = \overline{\phi_N(t_k)} = \sum_{j=0}^{N-1} \overline{c_j} e^{-ijt_k} = \sum_{j=0}^{N-1} \overline{c_j} e^{i(N-j)t_k} = \sum_{l=1}^N \overline{c_{N-l}} e^{ilt_k}$$

$\Rightarrow c_j = \overline{c_{N-j}}$, da Interpolationsaufgabe eindeutig lösbar.



Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, NWF III, Institut für Mathematik
Martin Arnold: Grundkurs Numerische Mathematik (WiS 2007/08)

Abbildung 4.1: Zusammenhang zwischen komplexer und reeller Darstellung des trigonometrischen Interpolationspolynoms.

$\Rightarrow c_j = \overline{c_{N-j}}$, da Interpolationsaufgabe eindeutig lösbar.

Wegen $e^{i \cdot 0 \cdot t_k} = e^{i \cdot N \cdot t_k} = 1$ ist insbesondere $c_0 = \overline{c_0}$, also $c_0 \in \mathbb{R}$.

Ebenso folgt $c_n \in \mathbb{R}$ für gerade $N = 2n$.

Sei nun $N = 2n + 1$, so ist

$$\begin{aligned} \phi_N(t_k) &= c_0 + \sum_{j=1}^{2n} c_j e^{ijt_k} = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j e^{ijt_k} + \sum_{l=1}^n c_{N-l} e^{i(N-l)t_k} \\ &= c_0 + \sum_{j=1}^n (c_j e^{ijt_k} + \overline{c_j} e^{-ijt_k}) \\ &= c_0 + 2 \sum_{j=1}^n \operatorname{Re}(c_j e^{ijt_k}) = c_0 + 2 \sum_{j=1}^n (\operatorname{Re} c_j \cdot \cos jt_k - \operatorname{Im} c_j \cdot \sin jt_k). \end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit des trigonometrischen Interpolationspolynoms folgt die Behauptung durch Koeffizientenvergleich. Analog für gerade $N = 2n$. ■

Satz 4.9 (Lösung der trigonometrischen Interpolationsaufgabe)

Für äquidistante Stützstellen $t_k = k \cdot 2\pi/N$, ($k = 0, 1, \dots, N-1$) ist die Lösung der trigonometrischen Interpolationsaufgabe

$$\phi_N(t_k) = f_k, \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

gegeben durch

$$\phi_N(t) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{ijt} \quad \text{mit} \quad c_j := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \omega_k^{-j}, \quad (j = 0, 1, \dots, N-1).$$

Beweis Wegen der Eindeutigkeit des trigonometrischen Interpolationspolynoms reicht es aus, für $l = 0, 1, \dots, N-1$ zu zeigen

$$f_l \stackrel{!}{=} \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \omega_k^{-j} \right)}_{= c_j} e^{ijt_l} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_k^{-j} \omega_l^j.$$

Nun ist

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega_k^{-j} \omega_l^j = \sum_{j=0}^{N-1} \omega_{l-k}^j = \begin{cases} N & \text{falls } k = l, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

denn

$$\frac{\omega_{l-k} - 1}{\omega_{l-k} - 1} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} \omega_{l-k}^j = \frac{1}{\omega_{l-k} - 1} \sum_{j=0}^{N-1} (\omega_{l-k}^{j+1} - \omega_{l-k}^j) = \frac{\omega_{l-k}^N - 1}{\omega_{l-k} - 1} = 0,$$

falls $l \neq k$, denn ω_{l-k} ist N -te Einheitswurzel. Hieraus folgt die Behauptung. ■

Bemerkung 4.10 (Diskrete Fourier-Transformation)

Für 2π -periodische Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$ erhält man mit den Fourierkoeffizienten

$$\hat{f}(j) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ijt} dt, \quad (j \in \mathbb{Z})$$

die abgebrochenen Fourier-Reihen

$$f_n(t) := \sum_{j=-n}^n \hat{f}(j) e^{ijt}.$$

Setzt man für $N = 2n + 1$

$$c_{-j} := c_{N-j}, \quad (j = 1, \dots, n),$$

so ist

$$\begin{aligned} \phi_N(t_k) &= \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{ijt_k} = \sum_{j=0}^n c_j e^{ijt_k} + \sum_{j=n+1}^{N-1} c_j e^{ijt_k} \\ &= \sum_{j=0}^n c_j e^{ijt_k} + \sum_{l=1}^n c_{N-l} e^{i(N-l)t_k} = \sum_{j=0}^n c_j e^{ijt_k} + \sum_{l=1}^n c_{-l} e^{i(-l)t_k} = \sum_{j=-n}^n c_j e^{ijt_k}. \end{aligned}$$

Bemerkung 4.10: Diskrete Fourier-Transformation

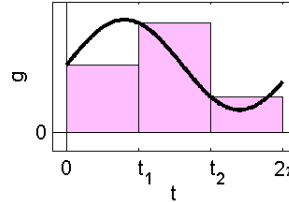
Trigonometrische Interpolation $\phi_N(t_k) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{ij t_k} = \sum_{j=-n}^n c_j e^{ij t_k}$
 ($N = 2n + 1$)

2π -periodische Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow$ (abgebrochene) Fourier-Reihe

$$f_n(t) := \sum_{j=-n}^n \hat{f}(j) e^{ij t} \quad \text{mit Fourierkoeffizienten } \hat{f}(j) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ij t} dt$$

Approximation

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt \approx \frac{2\pi}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g(t_k)$$



$$\hat{f}(j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ij t} dt \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-ij t_k} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) \omega_k^{-j} = c_j$$

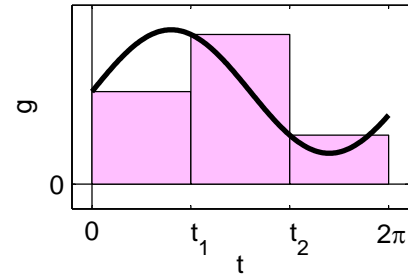


Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, NWF III, Institut für Mathematik
 Martin Arnold: Grundkurs Numerische Mathematik (WiS 2007/08)

Abbildung 4.2: Zusammenhang zwischen diskreter und kontinuierlicher Fouriertransformation.

Approximiert man

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt \approx \frac{2\pi}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g(t_k),$$



so ergibt sich

$$\hat{f}(j) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-ij t_k} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \omega_k^{-j} = c_j.$$

Wegen der Analogie zur klassischen kontinuierlichen Fourier-Transformation heißt die Abbildung

$$\mathcal{F}_N : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N, \quad (f_k)_{k=0}^{N-1} \mapsto (c_j)_{j=0}^{N-1}$$

aus Satz 4.9 *Diskrete Fourier-Transformation* (DFT) und die Umkehrabbildung

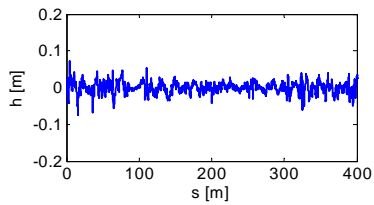
$$\mathcal{F}_N^{-1} : (c_j)_j \mapsto (f_k)_k, \quad f_k := \sum_{j=0}^{N-1} c_j \omega_j^k, \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

(Fourier-)Synthese oder *Inverse diskrete Fourier-Transformation* (IDFT).

Beispiel 4.11: Tiefpassfilter

Beispiel (Prof. Dr.-Ing. P. Pickel, U Halle, Landwirtschaftliche Fakultät)

Fahrweg eines landwirtschaftlichen Nutzfahrzeugs (vertikale Auslenkung)



Messdaten im Abstand $\Delta_s = 0.05$ m

Geschwindigkeit $v = 2.0$ m/s

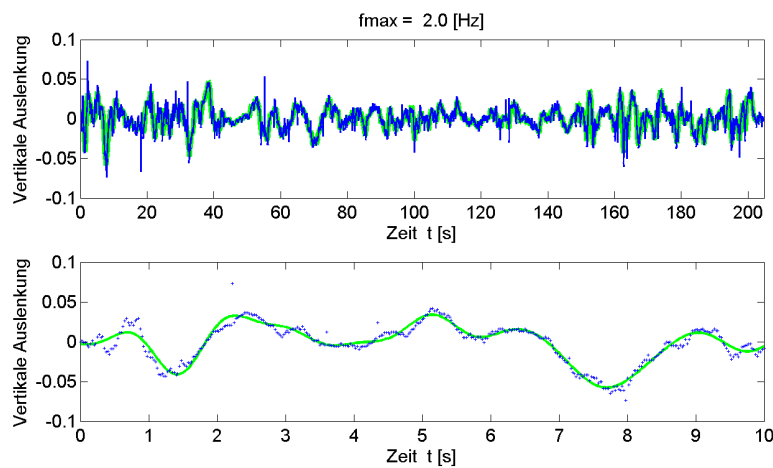
$\Rightarrow \Delta_t = 0.025$ s $\Rightarrow \bar{f}_{\text{input}} = 40$ Hz



Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, NWF III, Institut für Mathematik
Martin Arnold: Grundkurs Numerische Mathematik (WiS 2007/08)

Abbildung 4.3: Anwendung der DFT in der Signalverarbeitung: Ausgangsdaten.

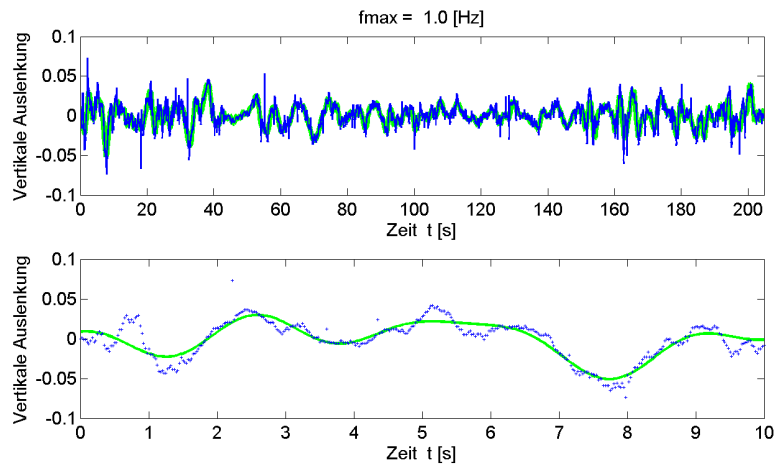
Beispiel 4.11: Tiefpassfilter (II)



Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, NWF III, Institut für Mathematik
Martin Arnold: Grundkurs Numerische Mathematik (WiS 2007/08)

Abbildung 4.4: Anwendung der DFT in der Signalverarbeitung: $f_{\text{max}} = 2.0$ Hz.

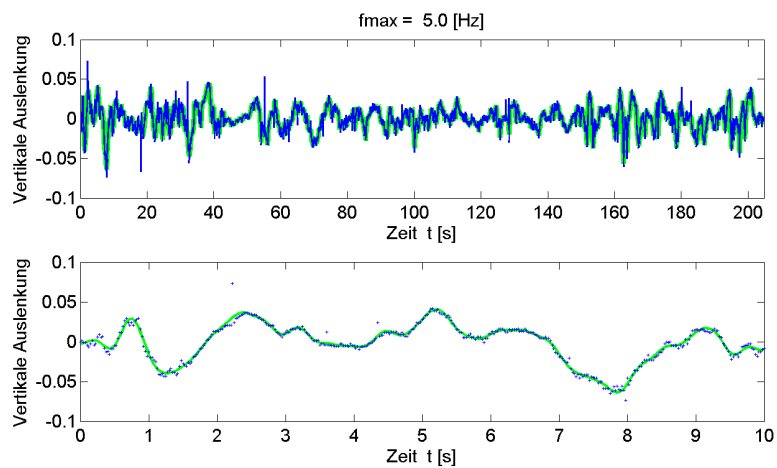
Beispiel 4.11: Tiefpassfilter (III)



Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, NWF III, Institut für Mathematik
Martin Arnold: Grundkurs Numerische Mathematik (WiS 2007/08)

Abbildung 4.5: Anwendung der DFT in der Signalverarbeitung: $f_{\max} = 1.0$ Hz.

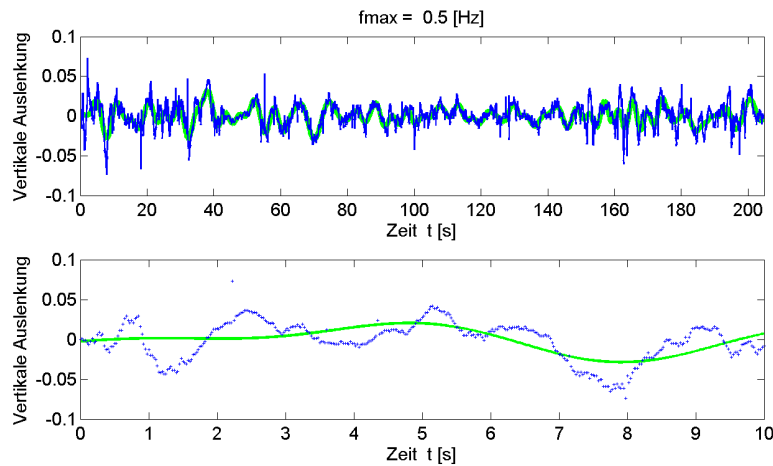
Beispiel 4.11: Tiefpassfilter (IV)



Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, NWF III, Institut für Mathematik
Martin Arnold: Grundkurs Numerische Mathematik (WiS 2007/08)

Abbildung 4.6: Anwendung der DFT in der Signalverarbeitung: $f_{\max} = 5.0$ Hz.

Beispiel 4.11: Tiefpassfilter (V)



Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, NWF III, Institut für Mathematik
 Martin Arnold: Grundkurs Numerische Mathematik (WiS 2007/08)

Abbildung 4.7: Anwendung der DFT in der Signalverarbeitung: $f_{\max} = 0.5 \text{ Hz}$.

Beispiel 4.11 (Tiefpassfilter)

Anwendung der DFT in der Signalverarbeitung

Elimination hochfrequenter Anteile im Signal, die häufig durch Messfehler verfälscht („Messrauschen“) und darüberhinaus für die praktische Anwendung oft nicht relevant sind \Rightarrow „Tiefpassfilter“.

praktisch Berücksichtige in $\phi_N(t)$ nur die Terme $a_j \cos jt$ und $b_j \sin jt$, die zu den ersten $j_{\max} \ll n$ Frequenzen gehören (j_{\max} ist vom Anwender vorzugeben). Für $N = 2n + 1$ erhält man

$$\tilde{f}_k := c_0 + \sum_{j=1}^{j_{\max}} c_j \omega_j^k + \sum_{j=1}^{j_{\max}} c_{N-j} \omega_{N-j}^k = c_0 + \sum_{j=1}^{j_{\max}} (c_j \omega_j^k + c_{N-j} \bar{\omega}_j^k), \quad (k = 0, 1, \dots, N - 1).$$

Beispiel Rauigkeit einer Feldoberfläche

(Originaldaten von Prof. Dr.-Ing. P. Pickel, Institut für Agrartechnik und Landeskultur). Die Messdaten für die Höhe $u(x)$ einer Feldoberfläche am Ort x liegen im Abstand von $\Delta_x = 0.05 \text{ m}$ vor (Abb. 4.3). Bei konstanter Fahrgeschwindigkeit $v = 2.0 \text{ m/s}$ entspricht dies einer Frequenz von $1 / (0.05 \text{ m} / 2.0 \text{ m/s}) = 40 \text{ Hz}$. Abb. 4.4 – Abb. 4.7 zeigen für verschiedene maximale Frequenzen f_{\max} den Vergleich zwischen gefilterten Daten und Originaldaten. Die Elimination der hochfrequenten Anteile in $u(t)$ ist deutlich erkennbar.

Bemerkung 4.12 (Schnelle Fourier–Transformation)

engl.: Fast Fourier Transform(ation) (FFT)

Problem Standard–Algorithmus zur Auswertung von \mathcal{F}_N oder \mathcal{F}_N^{-1} würde $\mathcal{O}(N^2)$ Rechenoperationen erfordern (Matrix–Vektor–Multiplikation).

Cooley–Tuckey (1965) Sei $N = 2M$ gerade und $\omega = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ oder $\omega = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$. Dann gilt für

$$\alpha_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \omega^{kj}, \quad (j = 0, 1, \dots, N-1)$$

$$\alpha_{2l} = \sum_{k=0}^{M-1} g_k \xi^{kl}, \quad \alpha_{2l+1} = \sum_{k=0}^{M-1} h_k \xi^{kl}, \quad (l = 0, 1, \dots, M-1)$$

mit $M := N/2$, $\xi := \omega^2$ und

$$g_k := f_k + f_{k+M}, \quad h_k := (f_k - f_{k+M}) \omega^k.$$

Mit $2M$ Additionen und $2M$ Multiplikationen ($\omega^k \rightarrow \omega^{k+1} = \omega \cdot \omega^k$, $h_k = (\dots) \cdot \omega^k$) wird die Berechnung von N Summen der Länge N zurückgeführt auf $2M = N$ Summen der Länge $M = N/2$.

Beweis

$$\alpha_{2l} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \omega^{k \cdot 2l} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} (f_k \omega^{2kl} + f_{k+\frac{N}{2}} \omega^{2(k+\frac{N}{2})l}) = \sum_{k=0}^{M-1} (f_k + f_{k+M}) \omega^{2kl}$$

$$\alpha_{2l+1} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \omega^{(2l+1)k} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} (f_k \omega^{2kl+k} + f_{k+\frac{N}{2}} \omega^{(2l+1)(k+\frac{N}{2})}) = \sum_{k=0}^{M-1} (f_k - f_{k+\frac{N}{2}}) \omega^k \cdot \omega^{2kl}$$

Rekursive Anwendung besonders einfach für $N = 2^p \Rightarrow$ Aufwand zur Berechnung von $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}$ (Analyse oder Synthese) beträgt $2N \log_2 N$ Multiplikationen.

Algorithmus 4.13 (Schnelle Fourier–Transformation)

Sei $N = 2^p$ und $\omega = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ oder $\omega = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$.

Eingabe: $f_0, f_1, \dots, f_{N-1} \in \mathbb{C}$

Ausgabe: $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{C}$ mit $\alpha_j := \sum_{k=0}^{N-1} f_k \omega^{kj}$.

```

 $N_{\text{red}} := N; \quad z := \omega$ 
while  $N_{\text{red}} > 1$  do
   $M_{\text{red}} := N_{\text{red}}/2$ 
  for  $j = 0 : (N/N_{\text{red}} - 1)$ 
     $l := jN_{\text{red}}$ 
    for  $k = 0 : M_{\text{red}} - 1$ 
       $a := f_{l+k} + f_{l+k+M_{\text{red}}}$ 
       $f_{l+k+M_{\text{red}}} := (f_{l+k} - f_{l+k+M_{\text{red}}})z^k$ 
       $f_{l+k} := a$ 
     $N_{\text{red}} := M_{\text{red}}; \quad z := z^2$ 
  for  $k = 0 : N - 1$ 
     $\alpha_{\sigma(k)} := f_k$ 

```

Vertauschung der Komponenten von α bestimmt durch Permutation $\sigma(k)$:

$$\sigma\left(\sum_{j=0}^{N-1} a_j 2^j\right) := \sum_{j=0}^{N-1} a_{N-j} 2^j \quad \text{mit } a_0, a_1, \dots, a_{N-1} \in \{0, 1\}.$$

↔ „bit reversal“, einfache Implementierung durch Bitmanipulationen

- Typisches Beispiel eines „divide-and-conquer“-Algorithmus,
- gut parallelisierbar,
- in Signalprozessoren hardwaremäßig verfügbar.

5 Quadratur

Bemerkung 5.1 (Problemstellung)

geg.: stückweise stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

ges.: $I(f) := I_a^b(f) := \int_a^b f(x) dx$

Eigenschaften

- Linearität: $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$
- Positivität: $f(x) \geq 0, (x \in [a, b]) \Rightarrow I(f) \geq 0$
- Additivität: $I_a^b(f) = I_a^c(f) + I_c^b(f), (c \in (a, b))$

Spezialfall $\tilde{f}(x) = x^k \Rightarrow I_a^b(\tilde{f}) = \int_a^b x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \Big|_a^b$