

# Satz 5.9: Konvergenz von Iterationsverfahren

## Satz von Stein und Rosenberg

Die Iterationsmatrizen von Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren sind gegeben durch  $B_J = D^{-1}(E + F)$  bzw.  $B_{GS} = (D - E)^{-1}F$ . Sind sämtliche Elemente der Matrix  $B_J$  nichtnegativ, so gilt genau eine der folgenden Beziehungen:

- (i)  $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J) = 0$ ,
- (ii)  $0 < \rho(B_{GS}) < \rho(B_J) < 1$ ,
- (iii)  $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J) = 1$ ,
- (iv)  $\rho(B_{GS}) > \rho(B_J) > 1$ .

## Satz von Kahan

Für die Iterationsmatrix

$$B_{SOR}(\omega) = (I - \omega D^{-1}E)^{-1} \left( (1 - \omega)I + \omega D^{-1}F \right)$$

des SOR-Verfahrens gilt  $\rho(B_{SOR}(\omega)) \geq |\omega - 1|$  für alle  $\omega \in \mathbb{R}$ .

