Definition 3.7: Vektornorm

Eine Abbildung $\|\,.\,\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$, falls

1. (i) $\|x\| \geq 0$, $(\, x \in \mathbb{R}^n\,)$, (ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Positivität)
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $(\, \alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n\,)$ (Homogenität)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $(\, x, y \in \mathbb{R}^n\,)$ (Dreiecks-ungleichung)

Bemerkung

Jedes Skalarprodukt $< .,. >$ in $\mathbb{R}^n$ erzeugt eine Vektornorm in $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\| := \sqrt{< x, x >}\,.$$

Es gilt die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung

$$|< x, y >| \leq \|x\| \cdot \|y\|\,, \ \ (\, x, y \in \mathbb{R}^n\,).$$