



Beispiel 7.5: Halbhomogene lineare Randwertprobleme.

Gegeben: Homogene lineare Differentialgleichung $L[y] \equiv y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$.

Charakteristisches Polynom $P(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$, Nullstellen $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 2$.

\Rightarrow Fundamentalsystem $\{y_1, y_2, y_3\}$ mit $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = xe^x$, $y_3(x) = e^{2x}$. Es gilt $y_1'(x) = y_1''(x) = e^x$, $y_2'(x) = (1+x)e^x$, $y_2''(x) = (2+x)e^x$, $y_3'(x) = 2e^{2x}$, $y_3''(x) = 4e^{2x}$.

a) Das Randwertproblem $y(0) = \alpha_1$, $y'(0) = \alpha_2$, $y(1) = \beta_1$ ist für beliebige $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1 \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar, denn

$$R = \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) & y_3(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) & y_3'(0) \\ y_1(1) & y_2(1) & y_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ e & e & e^2 \end{pmatrix}$$

ist regulär mit $\det R = e(e-2) \neq 0$.

b) Das Randwertproblem $y(0) - y'(0) = -1$, $y'(0) - y''(0) = -1$, $y(1) - y'(1) = -e$ hat unendlich viele Lösungen, denn

$$R = \begin{pmatrix} y_1(0) - y_1'(0) & y_2(0) - y_2'(0) & y_3(0) - y_3'(0) \\ y_1'(0) - y_1''(0) & y_2'(0) - y_2''(0) & y_3'(0) - y_3''(0) \\ y_1(1) - y_1'(1) & y_2(1) - y_2'(1) & y_3(1) - y_3'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -e & -e^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -e \end{pmatrix}$$

und $\text{rg}(R | \gamma) = \text{rg} R = 2 < 3$.

Lösungsmenge: $y(x) = (c_1 + x) \cdot e^x$ mit beliebigem $c_1 \in \mathbb{R}$.

c) Das Randwertproblem $y(0) - y'(0) = 0$, $y'(0) - y''(0) = 0$, $y(1) - y'(1) = 1$ ist wegen $\gamma = (0, 0, 1)^\top$, also $\text{rg} R = 2$, $\text{rg}(R | \gamma) = 3$ unlösbar.

Algorithmus 7.6: Lineare Randwertprobleme der Ordnung n .

Schritt 1 Bestimme eine spezielle Lösung $\psi(x)$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung $L[\psi] \equiv b$. **Lösungsansatz:** $y(x) = \psi(x) + z(x)$.

Schritt 2 Bilde zu einem Fundamentalsystem $\{z_1, \dots, z_n\}$ von $L[z] \equiv 0$ die Matrix R und den Vektor γ aus Satz 7.4.

Schritt 3 Bestimme, falls möglich, die Koeffizienten c_1, \dots, c_n in

$$y(x) = \psi(x) + z(x) = \psi(x) + c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x) + \dots + c_n z_n(x)$$

$$\text{als Lösung des linearen Gleichungssystems } R \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \gamma.$$



Beispiel 7.7: Lösung linearer Randwertprobleme der Ordnung n .

a) $L[y] \equiv y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 6, \quad y(1) = 3e^2 - 1.$

Schritt 1 Wähle $\psi(x) = -1. \Rightarrow y(x) = z(x) - 1$ mit

$$L[z] \equiv 0, \quad z(0) = 4, \quad z'(0) = 6, \quad z(1) = 3e^2.$$

Schritt 2 Nach Beispiel 7.5 ist $\{z_1, z_2, z_3\}$ mit $z_1(x) = e^x, z_2(x) = xe^x, z_3(x) = e^{2x}$ ein Fundamentalsystem von $L[z] \equiv 0$. Es ist (vgl. Beispiel 7.5a))

$$R = \begin{pmatrix} z_1(0) & z_2(0) & z_3(0) \\ z_1'(0) & z_2'(0) & z_3'(0) \\ z_1(1) & z_2(1) & z_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ e & e & e^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3e^2 \end{pmatrix}.$$

Schritt 3 Es gilt $\det R \neq 0$. $R \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \gamma \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 3.$

\Rightarrow Das Randwertproblem hat die eindeutig bestimmte Lösung $y(x) = (1-x)e^x + 3e^{2x} - 1$.

b) $L[y] \equiv y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x - 1, \quad y(0) - y'(0) = y'(0) - y''(0) = -2,$
 $y(1) - y'(1) = -(e + 2).$

Schritt 1 Bestimme eine spezielle Lösung $\psi(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung $L[\psi] \equiv 2x - 1$ gemäß Bemerkung 5.14 mit dem Lösungsansatz $\psi(x) = ax + b$. Einsetzen in $L[\psi] \equiv 2x - 1$ und Koeffizientenvergleich ergibt $\psi(x) = -(x + 2) \Rightarrow y(x) = z(x) - (x + 2)$ mit

$$L[z] \equiv 0, \quad z(0) - z'(0) = z'(0) - z''(0) = -1, \quad z(1) - z'(1) = -e.$$

Schritt 2 Mit R und γ wie in Beispiel 7.5b) ergeben sich wegen $\text{rg}(R | \gamma) = \text{rg} R = 2$ unendlich viele Lösungen.

Schritt 3 Es gilt $R \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \gamma \Leftrightarrow c_2 = 1, c_3 = 0, c_1 \in \mathbb{R}.$

\Rightarrow Die Lösungen des Randwertproblems sind $y(x) = (c_1 + x)e^x - (x + 2), \quad (c_1 \in \mathbb{R}).$