Beispiel 7.5: Halbhomogene lineare Randwertprobleme.

Gegeben: Homogene lineare Differentialgleichung $L[y] \equiv y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$.

Charakteristisches Polynom $P(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$, Nullstellen $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 2$.

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem $\{y_1, y_2, y_3\}$ mit $y_1(x) = \mathrm{e}^x$, $y_2(x) = x\mathrm{e}^x$, $y_3(x) = \mathrm{e}^{2x}$. Es gilt

$$y_1'(x) = y_1''(x) = \mathrm{e}^x, \; y_2'(x) = (1+x)\mathrm{e}^x, \; y_2''(x) = (2+x)\mathrm{e}^x, \; y_3'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}, \; y_3''(x) = 4\mathrm{e}^{2x}.$$

a) Das Randwertproblem $y(0) = \alpha_1$, $y'(0) = \alpha_2$, $y(1) = \beta_1$ ist für beliebige $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1 \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar, denn

$$R = \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) & y_3(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) & y_3'(0) \\ y_1(1) & y_2(1) & y_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \mathrm{e} & \mathrm{e} & \mathrm{e}^2 \end{pmatrix}$$

ist regulär mit $\det R = \mathrm{e}(\mathrm{e} - 2) \neq 0$.

b) Das Randwertproblem $y(0) - y'(0) = -1$, $y'(0) - y''(0) = -1$, $y(1) - y'(1) = -\mathrm{e}$ hat unendlich viele Lösungen, denn

$$R = \begin{pmatrix} y_1(0) - y_1'(0) & y_2(0) - y_2'(0) & y_3(0) - y_3'(0) \\ y_1'(0) - y_1''(0) & y_2'(0) - y_2''(0) & y_3'(0) - y_3''(0) \\ y_1(1) - y_1'(1) & y_2(1) - y_2'(1) & y_3(1) - y_3'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -\mathrm{e} & -\mathrm{e}^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -\mathrm{e} \end{pmatrix}$$

und $\operatorname{rg}(R \mid \gamma) = \operatorname{rg} R = 2 < 3$.

Lösungsmenge: $y(x) = (c_1 + x) \cdot \mathrm{e}^x$ mit beliebigem $c_1 \in \mathbb{R}$.

c) Das Randwertproblem $y(0) - y'(0) = 0$, $y'(0) - y''(0) = 0$, $y(1) - y'(1) = 1$ ist wegen $\gamma = (0, 0, 1)^\top$, also $\operatorname{rg} R = 2$, $\operatorname{rg}(R \mid \gamma) = 3$ unlösbar.

Algorithmus 7.6: Lineare Randwertprobleme der Ordnung n.

Schritt 1 Bestimme eine spezielle Lösung $\psi(x)$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung $L[\psi] \equiv b$. **Lösungsansatz:** $y(x) = \psi(x) + z(x)$.

Schritt 2 Bilde zu einem Fundamentalsystem $\{z_1, \dots, z_n\}$ von $L[z] \equiv 0$ die Matrix R und den Vektor γ aus Satz 7.4.

Schritt 3 Bestimme, falls möglich, die Koeffizienten $c_1, \dots, c_n$ in

$$y(x) = \psi(x) + z(x) = \psi(x) + c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x) + \dots + c_n z_n(x)$$

als Lösung des linearen Gleichungssystems $R \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \gamma$.

Beispiel 7.7: Lösung linearer Randwertprobleme der Ordnung n.

a) $L[y] \equiv y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 6$, $y(1) = 3\mathrm{e}^2 - 1$.

Schritt 1 Wähle $\psi(x) = -1$. $\Rightarrow$ $y(x) = z(x) - 1$ mit

$$L[z] \equiv 0, \quad z(0) = 4, \; z'(0) = 6, \; z(1) = 3\mathrm{e}^2.$$

Schritt 2 Nach Beispiel 7.5 ist $\{z_1, z_2, z_3\}$ mit $z_1(x) = \mathrm{e}^x$, $z_2(x) = x\mathrm{e}^x$, $z_3(x) = \mathrm{e}^{2x}$ ein Fundamentalsystem von $L[z] \equiv 0$. Es ist (vgl. Beispiel 7.5a))

$$R = \begin{pmatrix} z_1(0) & z_2(0) & z_3(0) \\ z_1'(0) & z_2'(0) & z_3'(0) \\ z_1(1) & z_2(1) & z_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \mathrm{e} & \mathrm{e} & \mathrm{e}^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3\mathrm{e}^2 \end{pmatrix}.$$

Schritt 3 Es gilt $\det R \neq 0$. $R \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \gamma \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1, \; c_2 = -1, \; c_3 = 3$.

$\Rightarrow$ Das Randwertproblem hat die eindeutig bestimmte Lösung $y(x) = (1-x)\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^{2x} - 1$.

b) $L[y] \equiv y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x - 1$, $y(0) - y'(0) = y'(0) - y''(0) = -2$,
$y(1) - y'(1) = -(\mathrm{e} + 2)$.

Schritt 1 Bestimme eine spezielle Lösung $\psi(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung $L[\psi] \equiv 2x - 1$ gemäß Bemerkung 5.14 mit dem Lösungsansatz $\psi(x) = ax + b$. Einsetzen in $L[\psi] \equiv 2x - 1$ und Koeffizientenvergleich ergibt $\psi(x) = -(x+2)$ $\Rightarrow$ $y(x) = z(x) - (x+2)$ mit

$$L[z] \equiv 0, \quad z(0) - z'(0) = z'(0) - z''(0) = -1, \; z(1) - z'(1) = -\mathrm{e}.$$

Schritt 2 Mit R und γ wie in Beispiel 7.5b) ergeben sich wegen $\operatorname{rg}(R \mid \gamma) = \operatorname{rg} R = 2$ unendlich viele Lösungen.

Schritt 3 Es gilt $R \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \gamma \;\Leftrightarrow\; c_2 = 1, \; c_3 = 0, \; c_1 \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Die Lösungen des Randwertproblems sind $y(x) = (c_1 + x)\mathrm{e}^x - (x+2)$, $(c_1 \in \mathbb{R})$.