Prof. Dr. M. Arnold, Institut für Numerische Mathematik
Theorie und Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
Modul M2, Wintersemester 2004/05

Spezielle Differentialgleichungen erster Ordnung

$\boxed{\text{T}}$ Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Aufgabenstellung

$$\boxed{y'(x) = f(x) \cdot g(y)}$$

Fallunterscheidung
Hat g eine Nullstelle $a \in \mathbb{R}$, so ist $y(x) \equiv a$ Lösung. Andernfalls ist $g(y) \neq 0$, $(\, y \in D\,)$.

Transformation Division durch $g(y) \neq 0$:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Lösungsschritt T.1 Bestimme Stammfunktionen $H(y)$, $F(x)$ von $\dfrac{1}{g(y)}$ und $f(x)$.

Ergebnis: $H(y) = F(x) + c\,,\ \ (\, c \in \mathbb{R}\,)$.

Lösungsschritt T.2 Löse – wenn möglich – $H(y) = F(x) + c$ auf nach y.

Ergebnis: Allgemeine Lösung $y(x; c)$, $(\, c \in \mathbb{R}\,)$.

$\boxed{\text{Ä}}$ Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

Aufgabenstellung

$$\boxed{y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Voraussetzungen $x \neq 0$ und $f(z) \neq z$, $(\, z \in \mathbb{R}\,)$.

Substitution

$$z(x) := \frac{y(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad x \cdot z'(x) = f(z) - z \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{Ä.1}$$

Lösungsschritt Ä.1 Substitution $z(x) := \dfrac{y(x)}{x}$.

Ergebnis: Differentialgleichung (Ä.1) mit getrennten Variablen.

Lösungsschritt Ä.2 Bestimme die allgemeine Lösung $z(x; c)$ von (Ä.1), vgl. $\boxed{\text{T}}$.

Lösungsschritt Ä.3 Allgemeine Lösung: $y(x; c) = x \cdot z(x; c)$, $(\, c \in \mathbb{R}\,)$.

$\boxed{\text{L}}$ Lineare Differentialgleichungen

Aufgabenstellung

$$\boxed{y'(x) = p(x) \cdot y + r(x)}$$

Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen linearen Differentialgleichung ist

$$y(x) = y_0(x) + y_h(x)$$

mit einer beliebigen speziellen Lösung $y_0(x)$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung und der allgemeinen Lösung $y_h(x)$ der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung

$$y_h'(x) = p(x) \cdot y_h \tag{L.1}$$

Lösungsschritt L.1 Lösung der homogenen Differentialgleichung (L.1):

Die homogene Differentialgleichung (L.1) ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen mit $f(x) = p(x)$, $g(y_h) = y_h$, vgl. $\boxed{\text{T}}$.

T.1: Die Stammfunktion $H(y_h)$ ist $H(y_h) = \ln |y_h|$. Die Stammfunktion $F(x)$ von $f(x) = p(x)$ sei mit $P(x)$ bezeichnet.

Ergebnis von T.1: Implizite Lösungsdarstellung $\ln |y_h| = P(x) + c$, $(\, c \in \mathbb{R}\,)$.

T.2: Auflösen nach y_h

$$y_h(x; C) = C\,\mathrm{e}^{P(x)},\ (\, C \in \mathbb{R}\,).$$

Lösungsschritt L.2 Bestimmung einer speziellen Lösung $y_0(x)$.

Methode (a): Variation der Konstanten

Lösungsansatz: $y_0(x) = c(x)\,\mathrm{e}^{P(x)}$

Einsetzen in die inhomogene lineare Differentialgleichung ergibt

$$c'(x)\,\mathrm{e}^{P(x)} = r(x) \quad \Rightarrow \quad c(x) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-P(\xi)} r(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Lässt sich dieses Integral geschlossen auswerten, so erhält man die gesuchte spezielle Lösung $y_0(x) = c(x)\,\mathrm{e}^{P(x)}$ in geschlossener Form.

Methode (b): Spezielle Ansätze für Differentialgleichungen mit $p(x) = \text{const}$.

- Ist $r(x)$ polynomial in $x \Rightarrow$ Ansatz $y_0(x) = q(x)$ mit einem Polynom q.
- Ist $r(x) = r_e(x)\,\mathrm{e}^{kx}$ mit einem Polynom $r_e \Rightarrow$ Ansatz $y_0(x) = q_e(x)\,\mathrm{e}^{kx}$ mit einem Polynom q_e.
- Ist $r(x) = r_s(x)\sin kx + r_c(x)\cos kx$ mit Polynomen r_s und r_c
$\Rightarrow$ Ansatz $y_0(x) = q_s(x)\sin kx + q_c(x)\cos kx$ mit Polynomen q_s und q_c.

Lösungsschritt L.3 Allgemeine Lösung: $y(x; c) = y_0(x) + y_h(x; c)$, $(\, c \in \mathbb{R}\,)$.

$\boxed{\text{B}}$ Bernoullische Differentialgleichung

Aufgabenstellung

$$\boxed{y'(x) = p(x)y + r(x)y^n} \quad \text{mit} \quad n \notin \{0,1\}$$

Substitution

$$z(x) := \big(y(x)\big)^{1-n} \quad \Rightarrow \quad z'(x) = (1-n)\,p(x)\,z(x) + (1-n)\,r(x) \tag{B.1}$$

Lösungsschritt B.1 Substitution $z(x) := \big(y(x)\big)^{1-n}$.
Ergebnis: Inhomogene lineare Differentialgleichung (B.1) in $z(x)$, vgl. $\boxed{\text{L}}$.

Lösungsschritt B.2 Bestimme die allgemeine Lösung $z(x;c)$ von (B.1), vgl. $\boxed{\text{L}}$.

Lösungsschritt B.3 Bestimme die allgemeine Lösung $y(x;c)$, $(\, c \in \mathbb{R}\,)$ durch Auflösung der nichtlinearen Gleichung $z(x;c) = y(x;c)^{1-n}$ nach y.

$\boxed{\text{R}}$ Riccatische Differentialgleichung

Aufgabenstellung

$$\boxed{y'(x) = p(x)y + r(x)y^2 + q(x)}$$

Voraussetzung
Sei eine spezielle Lösung $u(x)$ der Riccatischen Differentialgleichung bekannt.

Substitution

$$v(x) := y(x) - u(x) \quad \Rightarrow \quad v'(x) = (p(x) + 2u(x)r(x))\,v + r(x)v^2 \tag{R.1}$$

Lösungsschritt R.1 Substitution $v(x) := y(x) - u(x)$.
Ergebnis: Bernoullische Differentialgleichung (R.1) in $v(x)$, vgl. $\boxed{\text{B}}$ mit $n = 2$.

Lösungsschritt R.2 Bestimme die allgemeine Lösung $v(x;c)$ von (R.1), vgl. $\boxed{\text{B}}$.

Lösungsschritt R.3 Allgemeine Lösung: $y(x;c) = u(x) + v(x;c)$, $(\, c \in \mathbb{R}\,)$.

$\boxed{\text{E}}$ Exakte Differentialgleichungen

Aufgabenstellung

$$\boxed{f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y) + g(x,y)\,y'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)}}$$

Integrabilitätsbedingung Die Differentialgleichung ist genau dann exakt, wenn gilt:

$$f_y(x,y) = g_x(x,y)\,.$$

Allgemeine Lösung von exakten Differentialgleichungen

$$u(x,y) = c \;\text{ mit }\; u(x,y) := \int_{x_0}^{x} f(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi + \int_{y_0}^{y} g(x_0,\eta)\,\mathrm{d}\eta \;\text{ und einer Konstanten } c \in \mathbb{R}.$$

Lösung des Anfangswertproblems $y(x_0) = y_0$

Implizite Lösungsdarstellung: $u(x, y(x)) = 0$, ggf. auflösen nach $y = y(x)$.

Integrierender Faktor Suche zu einer beliebig vorgegebenen Differentialgleichung

$$f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

eine Funktion $\mu(x,y) \neq 0$ („integrierender Faktor") so, dass sich nach Multiplikation mit $\mu(x,y)$ eine exakte Differentialgleichung

$$\mu(x,y)\,f(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu(x,y)\,g(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

ergibt, für die man die Lösung wie oben in impliziter Form $u(x,y) = c$ angeben kann.

$\boxed{\text{U}}$ Lösung durch Übergang zur Umkehrfunktion

Aufgabenstellung

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x))} \quad \text{mit} \quad f(x,y) \neq 0$$

Übergang zur Umkehrfunktion

$$x'(y) = \frac{\mathrm{d}x(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{f(x(y), y)} \tag{U.1}$$

Lösungsschritt U.1 Übergang zur Umkehrfunktion $x(y)$.
Ergebnis: Differentialgleichung (U.1) in $x(y)$.

Lösungsschritt U.2 Bestimme die allgemeine Lösung $x(y;c)$ von (U.1), falls möglich. Die allgemeine Lösung $y(x;c)$ ist hierdurch implizit gegeben.