Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. M. Arnold und Dr. A. Gerisch

Klausur zum Modul M2, Wintersemester 2004/05
„Theorie und Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen“

Hinweise

- Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlungen.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- Erreichbare Punktzahl: 45 Punkte und 4 Zusatzpunkte.
- Explizites Eulerverfahren: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
- Euler-Heun-Verfahren: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$ mit $k_1 = f(x_n, y_n)$ und $k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1)$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = \arctan z + C$

Aufgabe 1. [Multiple Choice, 9 Punkte] Mehrfachnennungen sind möglich!

(a) Welche der folgenden Differentialgleichungen lassen sich durch Trennen der Veränderlichen lösen?

☐ $y' = 16\sqrt{16y}$ ☐ $y' = x + y$ ☐ $y' = \dfrac{\cos x}{\cos^2 y}$ ☐ $y' = \sin(xy)$

(b) Die Differentialgleichung $y' = x^3y^2 + \dfrac{y}{x} - x^5$ ist

☐ linear ☐ nichtlinear ☐ vom Riccati-Typ ☐ vom Bernoulli-Typ

(c) Die Differentialgleichung $y'' + xy' - 17y = 15$ ist

☐ linear ☐ nichtlinear ☐ homogen ☐ inhomogen

(d) Welche der folgenden Differentialgleichungen sind exakt?

☐ $(y + x)\,\mathrm{d}x - (y - x)\,\mathrm{d}y = 0$ ☐ $(y - x)\,\mathrm{d}x - (x - y)\,\mathrm{d}y = 0$

☐ $(2x\mathrm{e}^y - 1)\,\mathrm{d}x + (x^2\mathrm{e}^y + 1)\,\mathrm{d}y = 0$

(e) Welche der folgenden Funktionen $y(x)$ sind Eigenfunktionen zum Eigenwert $\lambda = 4$ des Eigenwertproblems $y'' + \lambda y = 0$ mit $y(0) = y(2\pi)$ und $y'(0) = y'(2\pi)$?

☐ $y(x) = 0$ ☐ $y(x) = \sin(2x)$ ☐ $y(x) = 2$ ☐ $y(x) = 2\pi\sin(2x)$

(f) Welche der folgenden Verfahren zur numerischen Lösung von $y' = f(x, y)$ mit $y(0) = y_0$ sind Einschrittverfahren? Dabei sei $k_1 = f(x_n, y_n)$ und $k_2 = f(x_{n+1}, y_n + hk_1)$.

☐ $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$ ☐ $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1}))$

☐ $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$

(g) Ein numerisches Verfahren zur Lösung von $y' = f(x, y), y(0) = y_0$ habe die Ordnung 3. Die Anwendung des Verfahrens mit Schrittweite h führt auf den globalen Fehler err_h. Bei halbierter Schrittweite gilt für den globalen Fehler $\mathrm{err}_{h/2}$

☐ $\mathrm{err}_{h/2} \approx \frac{1}{8}\,\mathrm{err}_h$ ☐ $\mathrm{err}_{h/2} \approx 2\,\mathrm{err}_h$ ☐ $\mathrm{err}_{h/2} \approx \frac{1}{2}\,\mathrm{err}_h$ ☐ $\mathrm{err}_{h/2} \approx 8\,\mathrm{err}_h$

Aufgabe 2. [Anfangswertproblem 1. Ordnung, 4 Punkte] Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 1 + y^2 \quad \text{mit} \quad y(\pi/4) = -1\,.$$

Aufgabe 3. [Lineare Differentialgleichung, 6 Punkte] Betrachten Sie die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 3y = 30\,\sin(3x)\,.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung.

(c) Geben Sie die allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung an.

Aufgabe 4. [Skalare Differentialgleichung, 7 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = xy^2 - \frac{y}{x}\,.$$

Sie können dazu die Substitution $z(x) := [y(x)]^{-1}$ verwenden.

Aufgabe 5. [Numerisches Verfahren, 5 Punkte] Berechnen Sie für das Anfangswertproblem

$$y' = x + y^2 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1$$

(a) zwei Schritte mit dem expliziten Euler-Verfahren mit $h = \frac{1}{2}$ und

(b) einen Schritt mit dem Euler-Heun-Verfahren und $h = 1$.

Aufgabe 6. [Differentialgleichungssystem, 7 Punkte] Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\,.$$

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung des Systems an.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems, die die Anfangsbedingungen $y_1(0) = 3$ und $y_2(0) = 5$ erfüllt.

Aufgabe 7. [Laplace-Transformation, 7 Punkte]

(a) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte von $f(t) = 3\sin(2\pi t) + \cos(2\pi t)\,.$

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dot{y} + 2y = \mathrm{e}^t$ mit $y(0) = 1$ mit der Methode der Laplace-Transformation.

Zusatzaufgabe. [4 Punkte] Die Funktion $y_1(x) = x$ ist Lösung der Differentialgleichung

$$x^2y'' - xy' + y = 0\,.$$

(a) Finden Sie durch Variation der Konstanten, also dem Ansatz $y_2(x) = C(x)y_1(x)$, eine weitere Lösung $y_2(x)$ der gegebenen Differentialgleichung.

(b) Zeigen Sie, dass $y_1(x)$ und $y_2(x)$ auf dem Intervall $[1, 2]$ linear unabhängig sind.

Lösungen

Serie 1

Aufgabe 1 ☐ x ☐ x
☐ x ☐ x
☐ x ☐ x ☐ x ☐ x

Aufgabe 2
$y = \tan(x - \pi/2)$

Aufgabe 3

(a) xx

Aufgabe 4

Aufgabe 5

(a) xx

Aufgabe 6

Aufgabe 7

(a) xx