

## Beispiel 7.5: Halbhomogene Randwertprobleme

Gegeben: Homogene lineare Differentialgleichung  $L[y] \equiv y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$ .

Charakteristisches Polynom  $P(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$ , Nullstellen  $\lambda_{1,2} = 1$ ,  $\lambda_3 = 2$ .

$\Rightarrow$  Fundamentalsystem  $\{y_1, y_2, y_3\}$  mit  $y_1(x) = e^x$ ,  $y_2(x) = xe^x$ ,  $y_3(x) = e^{2x}$ . Es gilt

$y_1'(x) = y_1''(x) = e^x$ ,  $y_2'(x) = (1+x)e^x$ ,  $y_2''(x) = (2+x)e^x$ ,  $y_3'(x) = 2e^{2x}$ ,  $y_3''(x) = 4e^{2x}$ .

a) Das Randwertproblem  $y(0) = \alpha_1$ ,  $y'(0) = \alpha_2$ ,  $y(1) = \beta_1$  ist für beliebige  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1 \in \mathbb{R}$  eindeutig lösbar, denn

$$R = \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) & y_3(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) & y_3'(0) \\ y_1(1) & y_2(1) & y_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ e & e & e^2 \end{pmatrix}$$

ist regulär mit  $\det R = e(e-2) \neq 0$ .

b) Das Randwertproblem  $y(0) - y'(0) = -1$ ,  $y'(0) - y''(0) = -1$ ,  $y(1) - y'(1) = -e$  hat unendlich viele Lösungen, denn

$$R = \begin{pmatrix} y_1(0) - y_1'(0) & y_2(0) - y_2'(0) & y_3(0) - y_3'(0) \\ y_1'(0) - y_1''(0) & y_2'(0) - y_2''(0) & y_3'(0) - y_3''(0) \\ y_1(1) - y_1'(1) & y_2(1) - y_2'(1) & y_3(1) - y_3'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -e & -e^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -e \end{pmatrix}$$

und  $\text{rg}(R | \gamma) = \text{rg} R = 2 < 3$ .

**Lösungsmenge:**  $y(x) = (c_1 + x) \cdot e^x$  mit beliebigem  $c_1 \in \mathbb{R}$ .

c) Das Randwertproblem  $y(0) - y'(0) = 0$ ,  $y'(0) - y''(0) = 0$ ,  $y(1) - y'(1) = 1$  ist wegen  $\gamma = (0, 0, 1)^\top$ , also  $\text{rg} R = 2$ ,  $\text{rg}(R | \gamma) = 3$  unlösbar.



# Algorithmus 7.6: Lineare Randwertprobleme

**Schritt 1** Bestimme eine spezielle Lösung  $\psi(x)$  der inhomogenen linearen Differentialgleichung  $L[\psi] \equiv b$ . **Lösungsansatz:**  $y(x) = \psi(x) + z(x)$ .

**Schritt 2** Bilde zu einem Fundamentalsystem  $\{z_1, \dots, z_n\}$  von  $L[z] \equiv 0$  die Matrix  $R$  und den Vektor  $\gamma$  aus Satz 7.4.

**Schritt 3** Bestimme, falls möglich, die Koeffizienten  $c_1, \dots, c_n$  in

$$y(x) = \psi(x) + z(x) = \psi(x) + c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x) + \dots + c_n z_n(x)$$

als Lösung des linearen Gleichungssystems  $R \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \gamma$ .



## Beispiel 7.7: Lineare Randwertprobleme

a)  $L[y] \equiv y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 6, \quad y(1) = 3e^2 - 1.$

**Schritt 1** Wähle  $\psi(x) = -1. \Rightarrow y(x) = z(x) - 1$  mit

$$L[z] \equiv 0, \quad z(0) = 4, \quad z'(0) = 6, \quad z(1) = 3e^2.$$

**Schritt 2** Nach Beispiel 7.5 ist  $\{z_1, z_2, z_3\}$  mit  $z_1(x) = e^x, z_2(x) = xe^x, z_3(x) = e^{2x}$  ein Fundamentalsystem von  $L[z] \equiv 0$ . Es ist (vgl. Beispiel 7.5a )

$$R = \begin{pmatrix} z_1(0) & z_2(0) & z_3(0) \\ z_1'(0) & z_2'(0) & z_3'(0) \\ z_1(1) & z_2(1) & z_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ e & e & e^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3e^2 \end{pmatrix}.$$

**Schritt 3** Es gilt  $\det R \neq 0$ .  $R \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \gamma \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 3.$

$\Rightarrow$  Das Randwertproblem hat die eindeutig bestimmte Lösung  $y(x) = (1-x)e^x + 3e^{2x} - 1.$



## Beispiel 7.7: Lineare Randwertprobleme (II)

$$\text{b) } L[y] \equiv y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x - 1, \quad y(0) - y'(0) = y'(0) - y''(0) = -2, \\ y(1) - y'(1) = -(e + 2).$$

**Schritt 1** Bestimme eine spezielle Lösung  $\psi(x)$  der inhomogenen Differentialgleichung  $L[\psi] \equiv 2x - 1$  gemäß Bemerkung 5.14 mit dem Lösungsansatz  $\psi(x) = ax + b$ . Einsetzen in  $L[\psi] \equiv 2x - 1$  und Koeffizientenvergleich ergibt  $\psi(x) = -(x + 2) \Rightarrow y(x) = z(x) - (x + 2)$  mit

$$L[z] \equiv 0, \quad z(0) - z'(0) = z'(0) - z''(0) = -1, \quad z(1) - z'(1) = -e.$$

**Schritt 2** Mit  $R$  und  $\gamma$  wie in Beispiel 7.5b) ergeben sich wegen  $\text{rg}(R | \gamma) = \text{rg } R = 2$  unendlich viele Lösungen.

**Schritt 3** Es gilt  $R \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \gamma \Leftrightarrow c_2 = 1, c_3 = 0, c_1 \in \mathbb{R}$ .

$\Rightarrow$  Die Lösungen des Randwertproblems sind  $y(x) = (c_1 + x)e^x - (x + 2), (c_1 \in \mathbb{R})$ .



# Modul M2: Vorlesung vom 11. Januar 2005

## Inhalt

- Lineare Randwertprobleme
- Eigenwertprobleme: Motivation, Beispiele
- Laplace-Transformation reeller Funktionen

## ToDo

- Übungsblatt 7

## Lust auf mehr ?

- Ausführlich dokumentierte Anwendungsbeispiele (Eigenwertprobleme):  
Meyberg/Vachenauer, Heuser

