Satz 5.55: Einfluss des Quadraturfehlers

Gegeben sei eine Familie von affin–äquivalenten Langrange–Finite–Elemente–Diskretisierungen im $I\!R^d$, $d \leq 3$, mit einem lokalen Ansatzraum $P = \mathcal{P}_k$ für ein $k \in I\!N$. Die Familie der Triangulierungen sei regulär oder erfülle im Fall des Dreiecks mit $k = 1$ die Maximalwinkelbedingung. Weiterhin seien alle verwendeten Quadraturformeln exakt auf $\mathcal{P}_{2k-2}$.

Betrachtet wird das in Abschnitt 5.2 eingeführte Randwertproblem (5.4) / (5.7) unter der Voraussetzung, daß die Lösung u der Randwertaufgabe und die die Randvorgabe erfüllende Funktion w beide in $H^{k+1}(\Omega)$ liegen.

Dann gibt es von u und w unabhängige positive Konstanten C, $\bar{h}$, so daß für die Finite–Elemente–Approximation $\bar{u}_h + w_h$ mit $h \leq \bar{h}$ die folgende Fehlerabschätzung gilt:

$$\|(u + w) - (\bar{u}_h + w_h)\|_1 \leq C\, h^k \Big(|u|_{k+1} + |w|_{k+1} +$$

$$+ \Big(\sum_{i,j=1}^{d} \|k_{ij}\|_{k,\infty} + \sum_{i=1}^{d} \|c_i\|_{k,\infty} + \|r\|_{k,\infty} \Big) \big(\|u\|_{k+1} + \|w\|_{k+1} \big) + \|f\|_{k,\infty} \Big) .$$