Satz 5.47: Konvergenz (polynomiale L-Elemente)

Gegeben sei eine Familie von Lagrange–Finite–Element–Diskretisierungen im $\mathbb{R}^d$ mit $d \le 3$ auf einer regulären Familie von Triangulierungen $(\mathcal{T}_h)_h$. Für die jeweiligen lokalen Ansatzräume P gelte $\mathcal{P}_k \subset P$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

a) Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, so daß für alle $v \in H^{k+1}(\Omega)$ und für alle $0 \le m \le k+1$ gilt:

$$|v - I_h(v)|_m = \Big(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v - I_K(v)|^2_{m,K} \Big)^{1/2} \le C\, h^{k+1-m}\, |v|_{k+1}\,.$$

b) Liegt die Lösung u der in Abschnitt 5.2 betrachteten Randwertaufgabe in $H^{k+1}(\Omega)$, so folgt für die Galerkin–Lösung:

$$\|u - u_h\|_1 \le C\, h^k\, |u|_{k+1}\,.$$