

Satz 5.22: Eindeutige Lösbarkeit: allgemeiner Fall

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Unter der Voraussetzung (5.5) besitzt das Randwertproblem (5.4)/(5.7) mit $g_3 \equiv 0$ und

$$k_{ij}, c_i, \nabla \cdot c, r \in L^\infty(\Omega), f \in L^2(\Omega), g_l \in L^2(\Gamma_l), \alpha \in L^\infty(\Gamma_2), \nabla \cdot c \in L^\infty(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$$

genau eine schwache Lösung $u \in V$, wenn gilt:

- (a) $r - \frac{1}{2} \nabla \cdot c \geq 0$ in Ω ,
- (b) $\nabla \cdot c \geq 0$ auf Γ_1 ,
- (c) $\alpha + \frac{1}{2} \nabla \cdot c \geq 0$ auf Γ_2
- (d) und eine der folgenden Bedingungen zusätzlich erfüllt ist:
 - (i) $|\Gamma_3|_{d-1} > 0$,
 - (ii) es gibt ein $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ mit $|\tilde{\Omega}|_d > 0$ und $r_0 > 0$, so daß $r - \frac{1}{2} \nabla \cdot c \geq r_0$ auf $\tilde{\Omega}$,
 - (iii) es gibt ein $\tilde{\Gamma}_1 \subset \Gamma_1$ mit $|\tilde{\Gamma}_1|_{d-1} > 0$ und $c_0 > 0$, so daß $\nabla \cdot c \geq c_0$ auf $\tilde{\Gamma}_1$,
 - (iv) es gibt ein $\tilde{\Gamma}_2 \subset \Gamma_2$ mit $|\tilde{\Gamma}_2|_{d-1} > 0$ und $\alpha_0 > 0$, so daß $\alpha + \frac{1}{2} \nabla \cdot c \geq \alpha_0$ auf $\tilde{\Gamma}_2$.

