# Definition 5.3: Sobolevräume $H^k(\Omega)\,,\ W_p^k(\Omega)\,.$

a) $H^k(\Omega) := \{\, v \,:\, \Omega \to I\!R \,:\, v \in L^2(\Omega)$, für alle Multiindizes $\alpha$ mit $|\alpha| \le k$ existieren schwache Ableitungen $\partial^\alpha v$ und $\partial^\alpha v \in L^2(\Omega)\,\}$

Skalarprodukt $\quad < v, w >_k := \int_\Omega \sum_{|\alpha|\le k} \partial^\alpha v \; \partial^\alpha w \, \mathrm{d}x$

Norm $\quad \|v\|_k \; := \; < v, v >_k^{1/2}$

$$= \Big( \int_\Omega \sum_{|\alpha|\le k} |\partial^\alpha v|^2 \,\mathrm{d}x \Big)^{1/2} = \Big( \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha v\|_0^2 \Big)^{1/2} = \Big( \sum_{l=0}^{k} |v|_l^2 \Big)^{1/2}$$

mit Halbnormen $\quad |v|_l \; := \Big( \sum_{|\alpha|=l} \|\partial^\alpha v\|_0^2 \Big)^{1/2}.$

b) $W_p^k(\Omega) := \{\, v \,:\, \Omega \to I\!R \,:\, v \in L^p(\Omega)$, für alle Multiindizes $\alpha$ mit $|\alpha| \le k$ existieren schwache Ableitungen $\partial^\alpha v$ und $\partial^\alpha v \in L^p(\Omega)\,\}$

Norm $\quad \|v\|_{k,p} := \Big( \int_\Omega \sum_{|\alpha|\le k} |\partial^\alpha v|^p \,\mathrm{d}x \Big)^{1/p}, \qquad$ Spezialfall: $\; H^k(\Omega) = W_2^k(\Omega)\,.$