Beispiel 4.9: FE-Diskretisierung

Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} -(375\, u'(x))' + 3750\, u(x) &= 3750 \cdot 293.15 \quad \forall x \in (0, 0.5) \\ u(0) &= 273.15 \\ u(0.5) &= 323.15 \end{aligned}$$

1D Randwertproblem mit Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{aligned} -w''(x) + 10\, w(x) &= 0 \qquad \forall x \in (0, 0.5) \\ w(0) &= -20 \\ w(0.5) &= 30 \end{aligned}$$

Beispiel 4.9: FE-Diskretisierung (II)

Variationsformulierung

$$\int_0^{0.5} \left[w'(x)v'(x) + 10\,w(x)v(x)\right] dx - \left(w'(0.5)v(0.5) - w'(0)v(0)\right) = 0\,.$$

Beachten wir noch die Bedingung $v(0) = v(0.5) = 0$, so folgt

$$\int_0^{0.5} \left[w'(x)v'(x) + 10\,w(x)v(x)\right] dx = 0\,.$$

Somit lautet die Variationsformulierung des Randwertproblems (3.98) – (3.100):

Gesucht ist $w \in V_g = \{w \in H^1(0,0.5) \;:\; w(0) = -20 \text{ und } w(0.5) = 30\}$, so dass

$$\int_0^{0.5} \left[w'(x)v'(x) + 10\,w(x)v(x)\right] dx = 0 \tag{3.106}$$

für alle $v \in V_0 = \{v \in H^1(0,0.5) \;:\; v(0) = v(0.5) = 0\}$ gilt.

Beispiel 4.9: FE-Diskretisierung (III)

© M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure. Teubner Stuttgart, 2001.

Elementsteifigkeitsmatrizen

$T^{(i)}$	$K_1^{(i)}$	$K_2^{(i)}$	$K^{(i)} = K_1^{(i)} + K_2^{(i)}$
$(0, 0.1)$	$\begin{pmatrix} 10 & -10 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{31}{3} & -\frac{59}{6} \\ -\frac{59}{6} & \frac{31}{3} \end{pmatrix}$
$(0.1, 0.25)$	$\begin{pmatrix} \frac{20}{3} & -\frac{20}{3} \\ -\frac{20}{3} & \frac{20}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{43}{6} & -\frac{77}{12} \\ -\frac{77}{12} & \frac{43}{6} \end{pmatrix}$
$(0.25, 0.4)$	$\begin{pmatrix} \frac{20}{3} & -\frac{20}{3} \\ -\frac{20}{3} & \frac{20}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{43}{6} & -\frac{77}{12} \\ -\frac{77}{12} & \frac{43}{6} \end{pmatrix}$
$(0.4, 0.5)$	$\begin{pmatrix} 10 & -10 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{31}{3} & -\frac{59}{6} \\ -\frac{59}{6} & \frac{31}{3} \end{pmatrix}$

Steifigkeitsmatrix

$$\bar{K}_h = \begin{pmatrix} \frac{31}{3} & -\frac{59}{6} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{59}{6} & \frac{31}{3} + \frac{43}{6} & -\frac{77}{12} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{77}{12} & \frac{43}{6} + \frac{43}{6} & -\frac{77}{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{77}{12} & \frac{43}{6} + \frac{31}{3} & -\frac{59}{6} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{59}{6} & \frac{31}{3} \end{pmatrix}$$

Beispiel 4.9: FE-Diskretisierung (IV)

Lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -\frac{59}{6} & \frac{35}{2} & -\frac{77}{12} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{77}{12} & \frac{42}{3} & -\frac{77}{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{77}{12} & \frac{35}{2} & -\frac{59}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -20 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Einarbeiten der Randbedingungen

$$\begin{pmatrix} \frac{35}{2} & -\frac{77}{12} & 0 \\ -\frac{77}{12} & \frac{42}{3} & -\frac{77}{12} \\ 0 & -\frac{77}{12} & \frac{35}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{590}{3} \\ 0 \\ 295 \end{pmatrix}$$