

# Satz 5.9: Konvergenz von Iterationsverfahren (II)

## Satz von Ostrowski und Reich

Für symmetrische positiv definite Matrizen  $A$  gilt  $\rho(B_{\text{SOR}}(\omega)) < 1$  für alle  $\omega \in (0, 2)$ . Insbesondere konvergiert das Gauß–Seidel–Verfahren ( $\omega = 1$ ) für jede symmetrische positiv definite Matrix  $A$ .

## Optimaler Relaxationsparameter

Gegeben sei eine konsistent geordnete Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , für die alle Eigenwerte von  $B_J = D^{-1}(E + F)$  reell sind und  $\rho(B_J) < 1$ .

Dann ist  $\rho(B_{\text{SOR}}(\omega))$  minimal für  $\omega = \omega_b := \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B_J)^2}}$ .

Es gilt

$$\rho(B_{\text{SOR}}(\omega)) = \begin{cases} 1 - \omega + \frac{1}{2}\omega^2\rho(B_J)^2 + \\ \quad + \omega \rho(B_J) \sqrt{1 - \omega + \frac{1}{4}\omega^2\rho(B_J)^2} & \text{für } \omega \in [0, \omega_b], \\ \omega - 1 & \text{für } \omega \in [\omega_b, 2]. \end{cases}$$

