Satz 5.9: Konvergenz von Iterationsverfahren

Satz von Stein und Rosenberg

Die Iterationsmatrizen von Jacobi– und Gauß–Seidel–Verfahren sind gegeben durch $B_{\mathrm{J}} = D^{-1}(E+F)$ bzw. $B_{\mathrm{GS}} = (D-E)^{-1}F$. Sind sämtliche Elemente der Matrix B_{J} nichtnegativ, so gilt genau eine der folgenden Beziehungen:

(i) $\varrho(B_{\mathrm{GS}}) = \varrho(B_{\mathrm{J}}) = 0$,

(ii) $0 < \varrho(B_{\mathrm{GS}}) < \varrho(B_{\mathrm{J}}) < 1$,

(iii) $\varrho(B_{\mathrm{GS}}) = \varrho(B_{\mathrm{J}}) = 1$,

(iv) $\varrho(B_{\mathrm{GS}}) > \varrho(B_{\mathrm{J}}) > 1$.

Satz von Kahan

Für die Iterationsmatrix

$$B_{\mathrm{SOR}}(\omega) = (I - \omega D^{-1}E)^{-1}\Big((1-\omega)I + \omega D^{-1}F\Big)$$

des SOR–Verfahrens gilt $\varrho(B_{\mathrm{SOR}}(\omega)) \geq |\omega - 1|$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$.