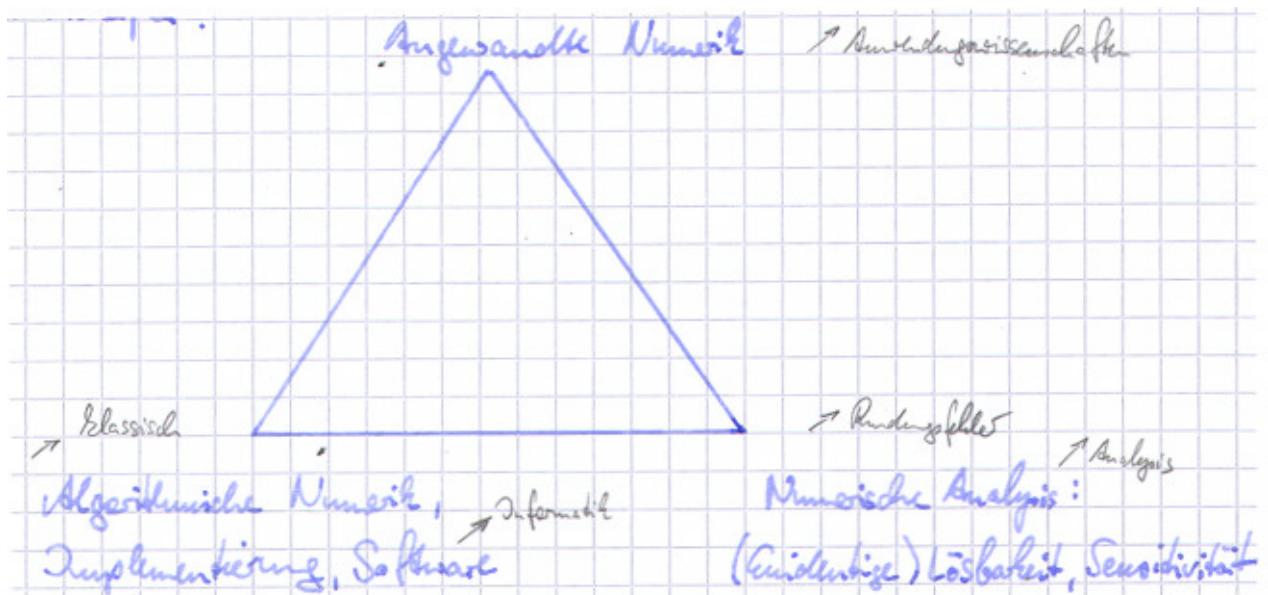


1 Einführung

1.1 Grundlagen

Bemerkung 1.1 (Numerische Mathematik)

- a) **Im engeren Sinn:** zahlenmäßige Auswertung mathematischer Zusammenhänge
z. B.
- Lösung von linearen und nichtlinearen Gleichungssystemen
 - Numerische Integration und Differentiation
 - Näherungsweise Auswertung reeller Funktionen
 - Numerische Lösung von Differentialgleichungen
 - Numerische Lösung von Optimierungsproblemen
- b) **Typisches Ziel:** Näherungen für die exakte Lösung eines mathematischen Problems, deren Fehler beliebig klein gemacht werden kann und für die verlässliche Fehlerschranken vorliegen.
- c) **praktisch:** wesentliche Komponente des Wissenschaftlichen Rechnens (engl.: scientific computing): Computersimulation auf der Grundlage mathematischer Modelle in den Anwendungswissenschaften: Naturwissenschaften, Ingenieurwissenschaften, Medizin, Wirtschaftswissenschaften.



Bemerkung 1.2 (Entwicklung der Rechentechnik)

- Entwicklung der Numerik untrennbar verknüpft mit Entwicklung der Rechentechnik
- Grundlagen: verstärkt ab 18. Jahrhundert

Bemerkung 1.2: Entwicklung der Rechentechnik

Z3 (1941)



ENIAC (1946)



Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, NWF III, Institut für Mathematik
Martin Arnold: Grundkurs Numerische Mathematik (WiS 2007/08)

Abbildung 1.1: Klassische Rechentechnik.

Bemerkung 1.2: Entwicklung der Rechentechnik (II)

Hitachi SR8000-F1



Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, NWF III, Institut für Mathematik
Martin Arnold: Grundkurs Numerische Mathematik (WiS 2007/08)

Abbildung 1.2: Moderner Hochleistungsrechner am LRZ München.

- 1941 Z3 (K. Zuse)
- 1946 ENIAC (J. v. Neumann)
- 1958 erster Mikrochip
- 1967 erster Taschenrechner
- 1976 Home-Computer „Apple“
- 1981 erster Personal Computer (PC)
- heute: leistungsfähige Arbeitsplatzrechner (PC, Workstation)
Vektor- und Parallelrechner für High performance computing
- seit 1971: Anzahl der elementaren Transistorfunktionen je Sekunde verdoppelt sich etwa nach jeweils 18 Monaten

Bemerkung 1.3 (Literatur)

- [1] Th. Huckle and S. Schneider. *Numerische Methoden. Eine Einführung für Informatiker, Naturwissenschaftler, Ingenieure und Mathematiker*. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 2006.
- [2] R.W. Freund and R.H.W. Hoppe. *Stoer / Bulirsch: Numerische Mathematik 1*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 10th edition, 2007.
- [3] J. Stoer and R. Bulirsch. *Numerische Mathematik 2*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 5th edition, 2005.
- [4] P. Deuffhard and A. Hohmann. *Numerische Mathematik I. Eine algorithmisch orientierte Einführung*. Walter de Gruyter, Berlin New York, 3rd edition, 2002.
- [5] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri. *Numerische Mathematik 1*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [6] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri. *Numerische Mathematik 2*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [7] G.H. Golub and Ch.F. van Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore London, 3rd edition, 1996.

1.2 Klassische Polynominterpolation

Bemerkung 1.4 (Problemstellung)

geg.: $n + 1$ Stützpunkte (x_j, y_j) , ($j = 0, 1, \dots, n$) mit Stützstellen x_j und Stützwerten y_j , zwischen denen ein (oft auch nur vermuteter) funktionaler Zusammenhang besteht: $y_j = f(x_j)$, ($j = 0, 1, \dots, n$). Praktisch oft: Messdaten y_j

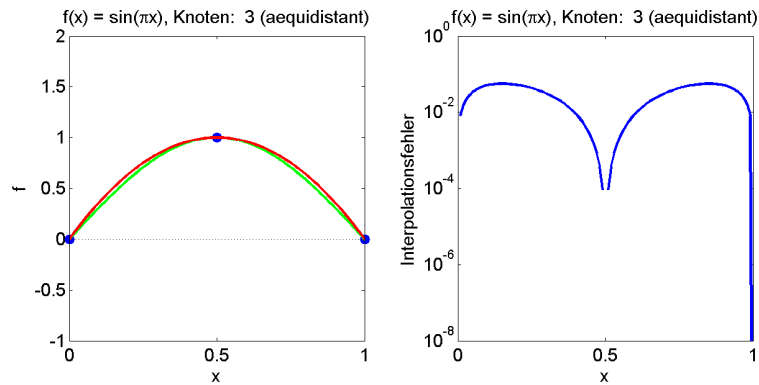
ges.: Polynom $\Phi^{(n)}(x)$ höchstens n -ten Grades, das die $n + 1$ Interpolationsbedingungen

$$y_j = \Phi^{(n)}(x_j), \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

erfüllt.

Bemerkung 1.4: Polynominterpolation

Beispiel $n = 2$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$
 $y_j = \sin \pi x_j$, ($j = 0, 1, 2$)



Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, NWF III, Institut für Mathematik
 Martin Arnold: Grundkurs Numerische Mathematik (WiS 2007/08)

Abbildung 1.3: Interpolationspolynom $\Phi^{(2)}(x)$ zu $f(x) = \sin \pi x$, ($x \in [0, 1]$).

Beispiel Tabellierte Daten, z. B.

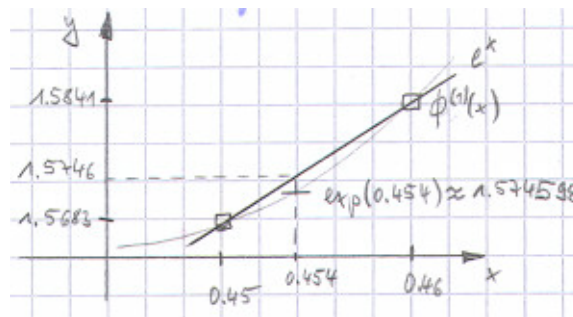
$n = 1$, $f(x) = e^x$, $x_0 = 0.45$, $x_1 = 0.46$, $y_0 = 1.5683 \approx \exp(0.45)$, $y_1 = 1.5841 \approx \exp(0.46)$

Lineare Interpolation

$$\exp(x) \approx \Phi^{(1)}(x) = 1.5683 + \frac{x - 0.45}{0.46 - 0.45}(1.5841 - 1.5683)$$

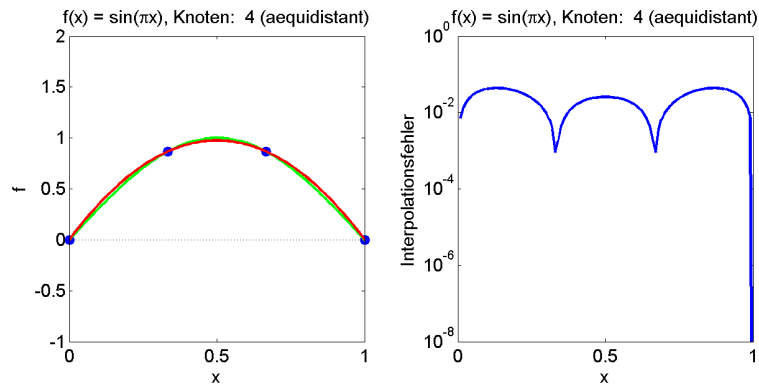
Beispiel

$$\Phi^{(1)}(0.454) = 1.5746$$



Bemerkung 1.4: Polynominterpolation (II)

Beispiel $n = 3$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$, $x_3 = 1$
 $y_j = \sin \pi x_j$, ($j = 0, 1, 2, 3$)

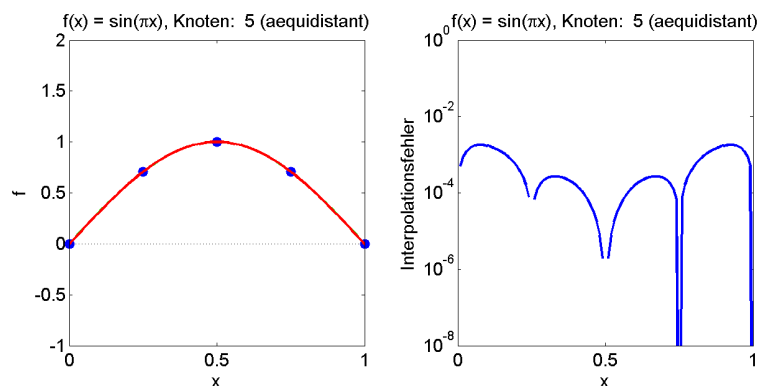


Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, NWF III, Institut für Mathematik
 Martin Arnold: Grundkurs Numerische Mathematik (WiS 2007/08)

Abbildung 1.4: Interpolationspolynom $\Phi^{(3)}(x)$ zu $f(x) = \sin \pi x$, ($x \in [0, 1]$).

Bemerkung 1.4: Polynominterpolation (III)

Beispiel $n = 4$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 3/4$, $x_4 = 1$
 $y_j = \sin \pi x_j$, ($j = 0, 1, 2, 3, 4$)

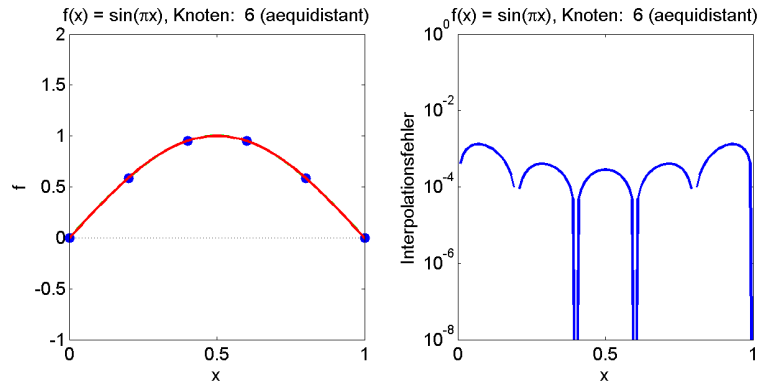


Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, NWF III, Institut für Mathematik
 Martin Arnold: Grundkurs Numerische Mathematik (WiS 2007/08)

Abbildung 1.5: Interpolationspolynom $\Phi^{(4)}(x)$ zu $f(x) = \sin \pi x$, ($x \in [0, 1]$).

Bemerkung 1.4: Polynominterpolation (IV)

Beispiel $n = 5$, $x_j = j/5$, ($j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)
 $y_j = \sin \pi x_j$, ($j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)

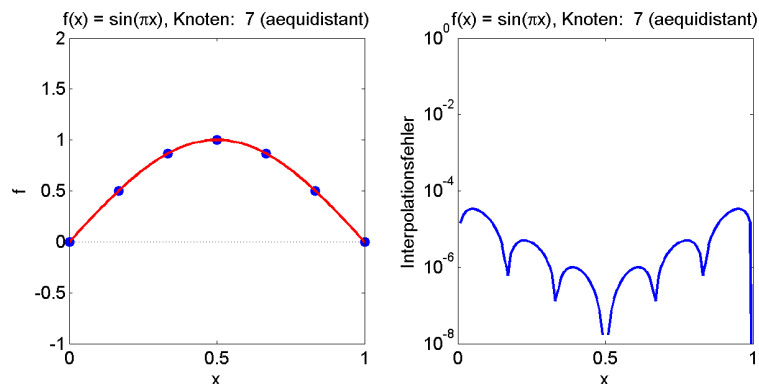


Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, NWF III, Institut für Mathematik
Martin Arnold: Grundkurs Numerische Mathematik (WiS 2007/08)

Abbildung 1.6: Interpolationspolynom $\Phi^{(5)}(x)$ zu $f(x) = \sin \pi x$, ($x \in [0, 1]$).

Bemerkung 1.4: Polynominterpolation (V)

Beispiel $n = 6$, $x_j = j/6$, ($j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$)
 $y_j = \sin \pi x_j$, ($j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$)



Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, NWF III, Institut für Mathematik
Martin Arnold: Grundkurs Numerische Mathematik (WiS 2007/08)

Abbildung 1.7: Interpolationspolynom $\Phi^{(6)}(x)$ zu $f(x) = \sin \pi x$, ($x \in [0, 1]$).

Bemerkung 1.5 (Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms)

Sind die Stützstellen x_0, x_1, \dots, x_n paarweise voneinander verschieden, so ist das Interpolationspolynom $\Phi^{(n)}(x)$ aus Bemerkung 1.4. eindeutig bestimmt, denn gilt für zwei Polynome $\Phi_1^{(n)}, \Phi_2^{(n)} \in \Pi_n$

$$\Phi_1^{(n)}(x_j) = \Phi_2^{(n)}(x_j) = y_j, \quad (j = 0, 1, \dots, n),$$

so ist $\Phi_1^{(n)} - \Phi_2^{(n)} \in \Pi_n$ ein Polynom mit den $n + 1$ Nullstellen x_0, x_1, \dots, x_n
 $\Rightarrow \Phi_1^{(n)} - \Phi_2^{(n)} = 0$ (Fundamentalsatz der Algebra), $\Phi_1^{(n)}(x) \equiv \Phi_2^{(n)}(x)$.

Bemerkung 1.6 (Horner–Schema)

Auswertung des Interpolationspolynoms mit je n Multiplikationen und Additionen:

$$\begin{aligned} \Phi^{(n)}(x) &= \sum_{j=0}^n a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \\ &= a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-1} + x a_n) \dots)) \end{aligned}$$

Horner–Schema

x	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_0
	$x \cdot a_n$	$x \cdot (a_{n-1} + x a_n)$	\dots	$x \cdot (\dots)$	
	a_n	$a_{n-1} + x a_n$	$a_{n-2} + x(a_{n-1} + x a_n)$	\dots	$\dots = \Phi^{(n)}(x)$

Beispiel Auswertung von $\Phi(x) = (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ an der Stelle $x = 5$:

5	1	-3	3	-1
		$5 \cdot 1 = 5$	$5 \cdot 2 = 10$	$5 \cdot 13 = 65$
	1	$-3 + 5 = 2$	$3 + 10 = 13$	$-1 + 65 = 64 = \Phi(5)$

Algorithmus

```

p := a_n
for i = n : -1 : 1
    | p := a_{i-1} + x * p
    
```

Matlab–Code Speicherschema für Vektoren in Matlab $(a_0, a_1, \dots, a_n) = \mathbf{a}(1:(n+1))$

```

p = a(n+1);
for i=n:-1:1,
    p = a(i) + x * p;
end;
    
```

Bemerkung 1.7 (Elementarer Zugang)

Sei $\Phi^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ mit den zunächst unbekanntenen Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n . Die Interpolationsbedingungen $y_j = \Phi^{(n)}(x_j)$, ($j = 0, 1, \dots, n$) sind äquivalent zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Lösung mit dem Gaußschen Algorithmus, vgl. Abschnitt 2.1.

Ziel: Transformation in ein äquivalentes lineares Gleichungssystem mit Dreiecksgestalt

Schritt 1 Addiere Vielfache der 1. Zeile zu Zeilen $2, \dots, n+1$ so, dass in der 1. Spalte alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonale verschwinden:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 - y_0 \\ \vdots \\ y_n - y_0 \end{pmatrix}$$

Rechenaufwand: $\approx n^2$ Rechenoperationen zur Transformation von n Zeilen mit je n Spalten

Schritt k Addiere Vielfache der k -ten Zeile zu Zeilen $k+1, \dots, n+1$ so, dass in der k -ten Spalte alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonale verschwinden.

Rechenaufwand: $\approx (n+1-k)^2$ Rechenoperationen zur Transformation von $n+1-k$ Zeilen mit je $n+1-k$ Spalten

gesamt n Gaußschritte mit insgesamt

$$\sum_{k=1}^n (n+1-k)^2 = \sum_{l=1}^n l^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Rechenoperationen.

Ergebnis: Rechenaufwand $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Rechenoperationen, wächst kubisch mit n .

Bemerkung 1.8 (Landau-Symbole)

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung von x_0 definiert. Gibt es für ein $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 0$ eine positive Konstante $\bar{c} \in \mathbb{R}$, so dass für alle x in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 die Abschätzung

$$|g(x)| \leq \bar{c} \cdot |x - x_0|^p$$

erfüllt ist, so schreibt man

$$g(x) = \mathcal{O}((x - x_0)^p), \quad (x \rightarrow x_0)$$

sprich: „ $g(x)$ ist groß O von $(x - x_0)^p$ “.

Beispiel $\sin x = \mathcal{O}(x), \quad (x \rightarrow 0)$

Existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^p}$ und ist $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^p} = 0$, so schreibt man

$$g(x) = o((x - x_0)^p), \quad (x \rightarrow x_0)$$

sprich: „klein o“.

Beispiel $\sqrt{x^3} = o(x), \quad (x \rightarrow 0)$

Entsprechend bedeutet

$$v(n) = \mathcal{O}(n^p), \quad (n \rightarrow \infty)$$

für eine Funktion $v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung $|v(n)| \leq \bar{c}n^p$ mit einer gewissen positiven Konstanten $\bar{c} \in \mathbb{R}$ erfüllt ist, und

$$v(n) = o(n^p), \quad (n \rightarrow \infty)$$

steht für

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v(n)}{n^p} = 0.$$

Beispiel $v(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Es gilt $v(n) < n \cdot 2n \cdot 3n / 6 = n^3$, also $v(n) = \mathcal{O}(n^3)$. Genauer gilt $v(n) = n^3/3 + w(n)$ mit $w(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \mathcal{O}(n^2)$, man schreibt kurz: $v(n) \doteq n^3/3$.

Bemerkung 1.9 (Klassische Polynominterpolation: Lagrange-Darstellung)

Elementarer Zugang aus Bemerkung 1.7 \Rightarrow Interpolationspolynom $\Phi^{(n)}$ in monomialer Basis $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$:

$$\Phi^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$$

Lagrange-Darstellung

$$\Phi^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^n y_j L_j^{(n)}(x)$$

mit den *Lagrangeschen Basispolynomen*

$$L_j^{(n)}(x) := \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{i-1})(x_j - x_{i+1}) \cdots (x_j - x_n)},$$

die die Interpolationsbedingungen

$$L_j(x_k) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

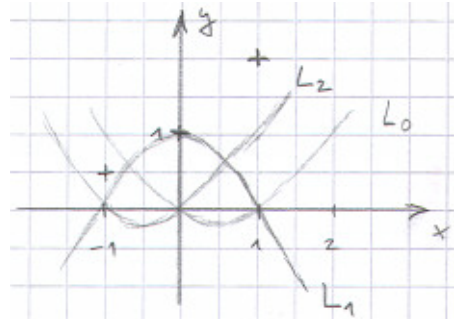
erfüllen.

Beispiel $n = 2$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

$$L_0^{(2)}(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}$$

$$L_1^{(2)}(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}$$

$$L_2^{(2)}(x) = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}$$



Bemerkung 1.10 (Rekursive Auswertung des Interpolationspolynoms)

Sei $\Phi_{i,\dots,i+l} \in \Pi_l$ das Interpolationspolynom zu Stützpunkten

$$(x_k, y_k), \quad (k = i, i+1, \dots, i+l).$$

Dann gilt

$$\Phi_{i+1,\dots,i+l}(x_k) = y_k, \quad (k = i+1, \dots, i+l),$$

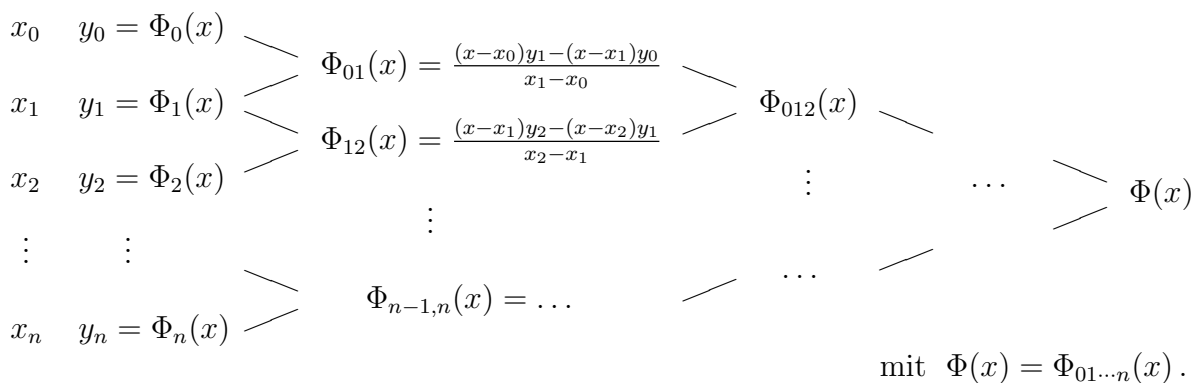
$$\Phi_{i,\dots,i+l-1}(x_k) = y_k, \quad (k = i, \dots, i+l-1),$$

also

$$\Phi_{i,\dots,i+l}(x) = \frac{(x-x_i)\Phi_{i+1,\dots,i+l}(x) - (x-x_{i+l})\Phi_{i,\dots,i+l-1}(x)}{x_{i+l} - x_i}, \quad (*)$$

denn der rechts stehende Ausdruck erfüllt $\Phi_{i,\dots,i+l}(x_k) = y_k$ für $k = i$, für $k = i+l$ und für $k = i+1, \dots, i+l-1$.

Neville-Schema



Beispiel 1.11 (Polynominterpolation: Neville–Schema)

Idee Approximiere $\sqrt{2} = 2^{1/2}$ durch $\Phi^{(2)}(1/2)$ mit dem Interpolationspolynom $\Phi^{(2)} \in \Pi_2$ zu $(-1, 1/2)$, $(0, 1)$ und $(1, 2)$.

Lagrange–Darstellung

$$\Phi^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{j=0}^2 y_j L_j^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot L_0^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot L_1^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot L_2^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right)$$

mit den Lagrangeschen Basispolynomen $L_j^{(2)}(x)$ aus Bemerkung 1.9.

Neville

$$\begin{array}{rcl} -1 & \frac{1}{2} & \searrow \\ & & \frac{(\frac{1}{2} - (-1)) \cdot 1 - (\frac{1}{2} - 0) \cdot \frac{1}{2}}{0 - (-1)} = \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & \nearrow \\ & & \searrow \\ & & \frac{(\frac{1}{2} - 0) \cdot 2 - (\frac{1}{2} - 1) \cdot 1}{1 - 0} = \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \nearrow \end{array} \quad \begin{array}{l} \searrow \\ \nearrow \end{array} \quad \frac{(\frac{1}{2} - (-1)) \cdot \frac{3}{2} - (\frac{1}{2} - 1) \cdot \frac{5}{4}}{1 - (-1)} = \frac{23}{16} = 1.4375$$

Bemerkung 1.12 (Klassische Polynominterpolation: Newton–Darstellung)

Problem Neville–Schema erfordert $\mathcal{O}(n^2)$ Rechenoperationen, ebenso die Auswertung von $\sum_j y_j L_j^{(n)}(x)$, aber

$$\sum_{j=0}^n a_j x^j = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-1} + x a_n) \dots))$$

kann mit $\mathcal{O}(n)$ Rechenoperationen ausgewertet werden.

gesucht Darstellung des Interpolationspolynoms, die man effizient bestimmen kann und die mit Horner–artigem Schema ausgewertet werden kann.

Ansatz Es gilt

$$\Phi_{i,i+1,\dots,i+l}(x) = \Phi_{i,i+1,\dots,i+l-1}(x) + (x - x_i)(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_{i+l-1}) f_{i,i+1,\dots,i+l}$$

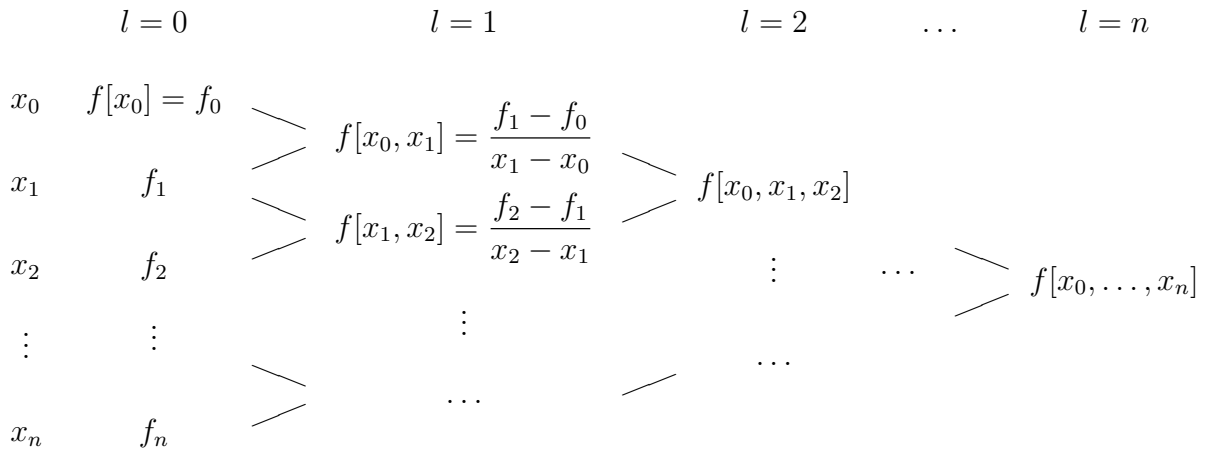
mit einem $f_{i,i+1,\dots,i+l} \in \mathbb{R}$, denn

$$\Phi_{i,i+1,\dots,i+l}(x_k) = \Phi_{i,i+1,\dots,i+l-1}(x_k), \quad (k = i, i + 1, \dots, i + l - 1).$$

Durch Vergleich der Koeffizienten von x^l in (*) aus Bemerkung 1.10 folgt

$$f_{i,i+1,\dots,i+l} = \frac{f_{i+1,\dots,i+l} - f_{i,\dots,i+l-1}}{x_{i+l} - x_i}.$$

Für $f_k = f(x_k)$ bezeichnet man diese *dividierten Differenzen* mit $f[x_i, \dots, x_{i+l}]$.
 Rekursive Berechnung mittels *Steigungsschema*



mit

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}, \dots$$

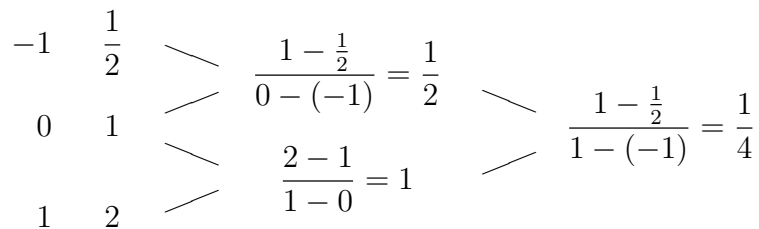
Newtonsche Darstellung

$$\Phi(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

Newton-Horner-Schema

$$\Phi(x) = f[x_0] + (x - x_0) (f[x_0, x_1] + (x - x_1) (f[x_0, x_1, x_2] + \dots + (x - x_{n-2}) (f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] + (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \dots, x_n]) \dots))$$

Beispiel vgl. Beispiel 1.11



$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + (x - (-1)) \cdot \frac{1}{2} + (x - (-1))(x - 0) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + (x + 1) \cdot \left(\frac{1}{2} + x \cdot \frac{1}{4}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{23}{16}$$

Bemerkung 1.12: Newton-Darstellung

Lagrangesche Basispolynome (vgl. Bemerkung 1.9)

$$L_j^{(n)}(x) := \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{i-1})(x_j - x_{i+1}) \cdots (x_j - x_n)}$$

Interpolationspolynom (rekursive Definition)

$$\Phi_{i,i+1,\dots,i+l}(x) = \Phi_{i,i+1,\dots,i+l-1}(x) + (x - x_i)(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_{i+l-1})f_{i,i+1,\dots,i+l}$$

Koeffizientenvergleich in

$$\begin{aligned} \Phi_{i,\dots,i+l}(x) &= \frac{(x - x_i)\Phi_{i+1,\dots,i+l}(x) - (x - x_{i+l})\Phi_{i,\dots,i+l-1}(x)}{x_{i+l} - x_i} \quad (*) \\ \Rightarrow f_{i,i+1,\dots,i+l} &= \frac{f_{i+1,\dots,i+l} - f_{i,\dots,i+l-1}}{x_{i+l} - x_i} \end{aligned}$$



Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, NWF III, Institut für Mathematik
Martin Arnold: Grundkurs Numerische Mathematik (WiS 2007/08)

Abbildung 1.8: Rekursive Bestimmung der $f_{i,i+1,\dots,i+l}$: Beweisidee.

Algorithmen

Steigungsschema

```
for i = n : -1 : 0
    a_i := f_i
    for j = i + 1 : n
        a_j := (a_j - a_{j-1}) / (x_j - x_i)
```

Newton-Horner-Schema

```
p := a_n
for i = n - 1 : -1 : 0
    p := a_i + (x - x_i)p
```

Satz 1.13 (Restglied der Polynominterpolation)

Sei $f \in C^{n+1}[a, b]$ und Φ das Interpolationspolynom zu den Stützstellen

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b,$$

d. h. $\Phi(x_k) = f(x_k)$, ($k = 0, 1, \dots, n$). Dann gibt es zu jedem $\bar{x} \in [a, b]$ ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$f(\bar{x}) - \Phi(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \cdots (\bar{x} - x_n).$$

Beweis Die Behauptung ist trivial für $x = x_k$, ($k = 0, 1, \dots, n$).

Andernfalls betrachtet man

$$g(x) := f(x) - \Phi(x) - K(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

mit

$$K := \frac{f(\bar{x}) - \Phi(\bar{x})}{(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \cdots (\bar{x} - x_n)}.$$

Die Funktion g hat in $[a, b]$ (mindestens) $n+2$ Nullstellen: $x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}$. Nach dem Satz von Rolle hat g' mindestens $n+1$ Nullstellen usw. und schließlich $g^{(n+1)}(x)$ mindestens eine Nullstelle $\xi \in [a, b]$. Wegen

$$\begin{aligned} 0 &= g^{(n+1)}(\xi) \\ &= f^{(n+1)}(\xi) - \underbrace{\frac{d^{n+1}\Phi(x)}{dx^{n+1}} \Big|_{x=\xi}}_{= 0, \text{ da } \Phi \in \Pi_n} - K \cdot \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left((x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \right) \Big|_{x=\xi} \\ &= f^{(n+1)}(\xi) - K \cdot (n+1)! \end{aligned}$$

folgt schließlich $K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ und hieraus die Behauptung. ■

Bemerkung 1.14 (Wahl der Stützstellen)

a) Nach Satz 1.13 sollte man die Stützstellen möglichst so wählen, dass

$$\max_{x \in [a, b]} |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)| \rightarrow \min$$

Typische Stützstellen:

- äquidistant: $x_j := a + jh$, Schrittweite $h := \frac{b-a}{n}$
- Tschebyscheff–Stützstellen: $[a, b] = [-1, 1]$

$$x_j := \cos \frac{(2j+1)\pi}{2n+2}, \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

b) Zu jeder Folge von Stützstellen lässt sich ein $f \in C[a, b]$ angeben, so dass die zugehörige Folge der Interpolationspolynome nicht gleichmäßig konvergiert (Satz von Faber).

c) Praktische Erfahrung: Polynome hohen Grades neigen zu Oszillationen und sollten vermieden werden.

Beispiel 1.15 (Funktion von Runge)

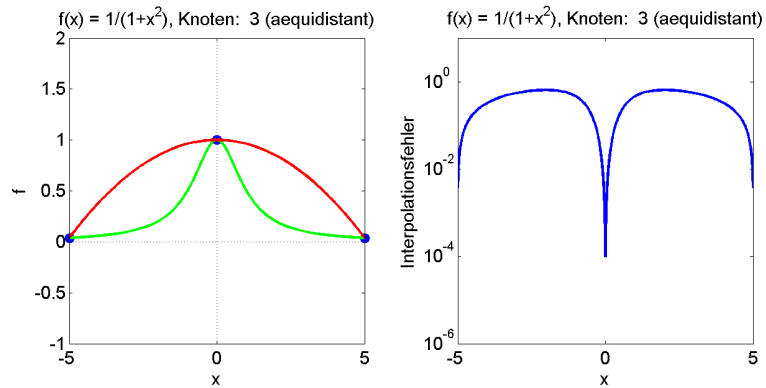
Äquidistante Stützstellen sind ungeeignet zur Interpolation der *Funktion von Runge*

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad (x \in [-5, 5])$$

(vgl. Abb. 1.9, 1.10 und 1.11). Bessere Ergebnisse für Tschebyscheff–Stützstellen (vgl. Abb. 1.12 und 1.13).

Beispiel 1.15: Funktion von Runge

Beispiel $n = 2$, $x_0 = -5$, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$
 $y_j = 1/(1 + x_j^2)$, ($j = 0, 1, 2$)

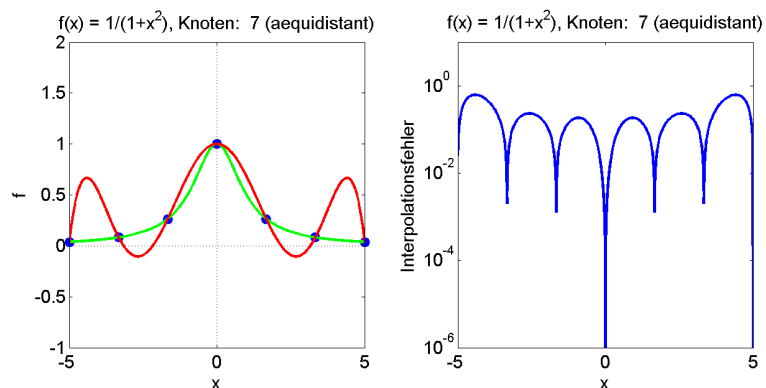


Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, NWF III, Institut für Mathematik
Martin Arnold: Grundkurs Numerische Mathematik (WiS 2007/08)

Abbildung 1.9: Interpolation der Funktion von Runge: $\Phi^{(2)}(x)$, Stützstellen äquidistant.

Beispiel 1.15: Funktion von Runge (II)

Beispiel $n = 6$, $x_j = -5 + 10j/6$, ($j = 0, 1, \dots, 6$)
 $y_j = 1/(1 + x_j^2)$, ($j = 0, 1, \dots, 6$)

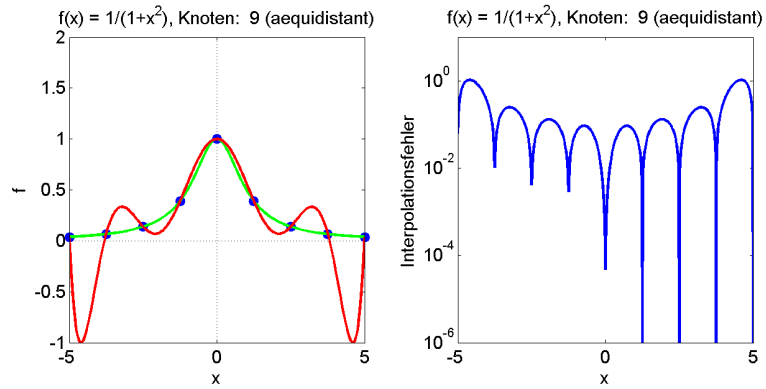


Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, NWF III, Institut für Mathematik
Martin Arnold: Grundkurs Numerische Mathematik (WiS 2007/08)

Abbildung 1.10: Interpolation der Funktion von Runge: $\Phi^{(6)}(x)$, Stützstellen äquidistant.

Beispiel 1.15: Funktion von Runge (III)

Beispiel $n = 8, x_j = -5 + 10j/8, (j = 0, 1, \dots, 8)$
 $y_j = 1/(1 + x_j^2), (j = 0, 1, \dots, 8)$

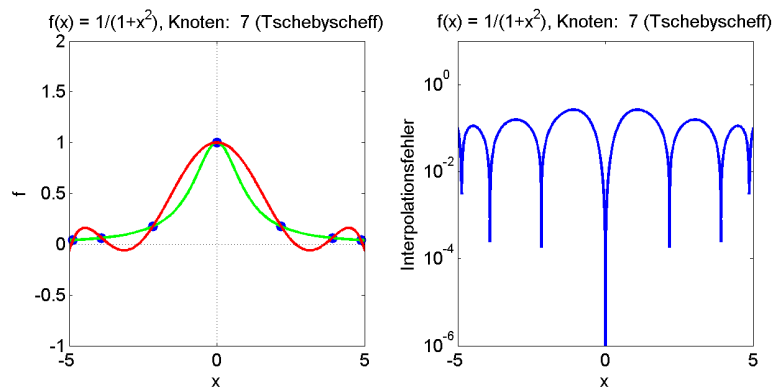


Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, NWF III, Institut für Mathematik
 Martin Arnold: Grundkurs Numerische Mathematik (WiS 2007/08)

Abbildung 1.11: Interpolation der Funktion von Runge: $\Phi^{(8)}(x)$, Stützstellen äquidistant.

Beispiel 1.15: Funktion von Runge (IV)

Beispiel $n = 6, x_j = 5 \cos \frac{(2j+1)\pi}{14}, (j = 0, 1, \dots, 6)$
 $y_j = 1/(1 + x_j^2), (j = 0, 1, \dots, 6)$

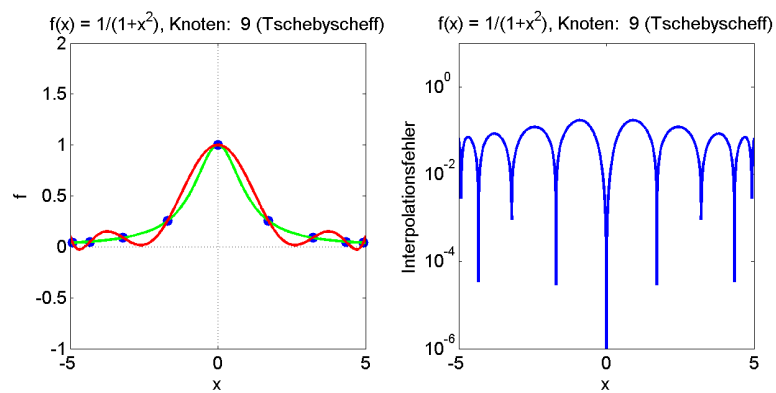


Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, NWF III, Institut für Mathematik
 Martin Arnold: Grundkurs Numerische Mathematik (WiS 2007/08)

Abbildung 1.12: Interpolation der Funktion von Runge: $\Phi^{(6)}(x)$, Tschebyscheff-Stützstellen.

Beispiel 1.15: Funktion von Runge (V)

Beispiel $n = 8$, $x_j = 5 \cos \frac{(2j+1)\pi}{18}$, ($j = 0, 1, \dots, 8$)
 $y_j = 1/(1 + x_j^2)$, ($j = 0, 1, \dots, 8$)



Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, NWF III, Institut für Mathematik
Martin Arnold: Grundkurs Numerische Mathematik (WiS 2007/08)

Abbildung 1.13: Interpolation der Funktion von Runge: $\Phi^{(8)}(x)$, Tschebyscheff–Stützstellen.