Definition 3.7: Vektornorm

Eine Abbildung $\| . \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$, falls

1. $(i)\ \ \|x\| \geq 0,\ (\, x \in \mathbb{R}^n\,),\quad (ii)\ \ \|x\| = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$ (Positivität)
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|\,,\ \ (\, \alpha \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^n\,)$ (Homogenität)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\,,\ \ (\, x, y \in \mathbb{R}^n\,)$ (Dreiecksungleichung)

Bemerkung

Jedes Skalarprodukt $< .,. >$ in $\mathbb{R}^n$ erzeugt eine Vektornorm in $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\| := \sqrt{< x, x >}\,.$$

Es gilt die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung

$$|< x, y >| \leq \|x\| \cdot \|y\|\,,\ \ (\, x, y \in \mathbb{R}^n\,).$$