Satz 5.9: Konvergenz von Iterationsverfahren (II)

Satz von Ostrowski und Reich

Für symmetrische positiv definite Matrizen A gilt $\varrho(B_{\mathsf{SOR}}(\omega)) < 1$ für alle $\omega \in (0,2)$. Insbesondere konvergiert das Gauß–Seidel–Verfahren ($\omega = 1$) für jede symmetrische positiv definite Matrix A.

Optimaler Relaxationsparameter

Gegeben sei eine konsistent geordnete Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, für die alle Eigenwerte von $B_{\mathsf{J}} = D^{-1}(E+F)$ reell sind und $\varrho(B_{\mathsf{J}}) < 1$.

Dann ist $\varrho(B_{\mathsf{SOR}}(\omega))$ minimal für $\omega = \omega_{\mathsf{b}} := \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 - \varrho(B_{\mathsf{J}})^2}}$.

Es gilt

$$\varrho(B_{\mathsf{SOR}}(\omega)) = \begin{cases} \begin{array}{l} 1 - \omega + \frac{1}{2}\omega^2 \varrho(B_{\mathsf{J}})^2 + \\ \quad + \omega\, \varrho(B_{\mathsf{J}}) \sqrt{1 - \omega + \frac{1}{4}\omega^2 \varrho(B_{\mathsf{J}})^2} \end{array} & \text{für } \omega \in [0, \omega_{\mathsf{b}}]\,, \\ \omega - 1 & \text{für } \omega \in [\omega_{\mathsf{b}}, 2]\,. \end{cases}$$