

Beispiel 2.5: Inhomogene Randbedingungen

b) Lösung des inhomogenen Problems mit homogenen AB und RB:

„Variation der Konstanten“ $\bar{u}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x$ mit $\alpha_n(0) = 0$ (homogene AB)

Einsetzen in $\bar{u}_t - k \bar{u}_{xx} = f$ führt mit geeigneten Glattheitsvoraussetzungen auf

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dot{\alpha}_n(t) + k \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \alpha_n(t) \right) \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x, t)$$

Nutze die Orthogonalität der Eigenfunktionen:

$$\int_0^L \sin \frac{m\pi}{L} \xi \cdot \dots \, d\xi \Rightarrow \frac{L}{2} \left(\dot{\alpha}_m(t) + k \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \alpha_m(t) \right) = \int_0^L f(\xi, t) \sin \frac{m\pi}{L} \xi \, d\xi$$

Formale Lösung dieser inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$\alpha_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^t e^{-k \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 (t-\tau)} \left(\int_0^L f(\xi, \tau) \sin \frac{n\pi}{L} \xi \, d\xi \right) d\tau$$

$$\bar{u}(x, t) = \int_0^t \int_0^L \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 (t-\tau)} \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot \sin \frac{n\pi}{L} \xi \cdot f(\xi, \tau) \, d\xi d\tau$$

