Strukturaussagen zu zweidimensionalen Stäbchensystemen

Sören Köhler

18. Mai 2000

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

***Hofstadter's Law**: It always takes longer than you expect, even when you take into account Hofstadter's Law*

D. R. Hofstadter: „Gödel, Escher, Bach“

Die Theorie der dynamischen Systeme hat sich zu einem wichtigen Bestandteil der modernen Mathematik entwickelt. Man denkt dabei häufig zuerst an die differenzierbaren (bzw. glatten) dynamischen Systeme, die eine große Rolle z.B. in der Physik oder der Chaostheorie spielen. Bei der theoretischen Untersuchung solcher Systeme erweisen sich oft die sogenannten topologischen dynamischen Systeme als nützlich. Dabei ist der Phasenraum durch einen kompakten topologischen Raum gegeben, die zeitliche Entwicklung des Systems durch eine Homöomorphismengruppe oder eine Halbgruppe stetiger Abbildungen.

Eine spezielle Klasse solcher topologischen dynamischen Systeme bilden die Konfigurationenräume. Sie wurden ursprünglich von Ruelle entwickelt (siehe z.B. [9]) und sind unter anderem ein wichtiges Hilfsmittel zur Beschreibung von Phasenübergängen in der statistischen Physik. Den Ausgangspunkt bildet dabei eine diskrete Menge M, deren Element („Atome“) nach gewissen Regeln (Restriktionen) bestimmte Zuständen (Farben, Symbolen) aus einer Menge S (Zustands- bzw. Farbmenge, Alphabet) annehmen. Jede vollständige, den Restriktionen genügende „Zustandsbelegung“ von M wird zulässige Konfiguration genannt. Die Gesamtheit der zulässigen Konfigurationen der Menge M bilden einen Konfigurationenraum. Stehen für jedes Element aus M nur endlich viele Zustände aus der Zustandsmenge S zur Verfügung, so erweist sich unter Verwendung der diskreten Topologie auf S und der darauf aufbauenden induzierten Produkttopologie auf S^M jeder Konfigurationenraum als topologischer Raum. Zusammen mit einer geeigneten Abbildung als Dynamik (häufig die Shiftabbildung) liegt dann ein topologisches dynamisches System vor.

Betrachtet man speziell $M := \mathbb{Z}^\nu$ und $S := \{1, \ldots, n\}$, so lassen sich die Restriktionen in vielen wichtigen Fällen auf einfache Weise darstellen: man legt fest, mit welchen Zuständen die Punkte jedes beliebigen ν-dimensionalen Quaders der Seitenlänge 2 belegt werden dürfen[1]. Wegen der Endlichkeit solcher Restriktionensysteme werden die dadurch auf $\mathbb{Z}^\nu$ definierten Konfigurationenräume $\mathbb{Z}^\nu$-Subshift endlichen Typ[2] (vgl. [1], [7]). Die Subshifts endlichen Typs können als Modelle (z.B. [3]) für andere dynamische Systeme erwiesen. Deshalb wurde in der Vergangenheit besonders der eindimensionale Fall recht gründlich untersucht (z.B. [1], [2], [7]).

Zur Modellierung molekülbasierter Zusammenhänge (etwa aus dem Bereich der Quasikristalle) erweitert Michel in [6] den Formalismus von Ruelles Konfigurationen zum Begriff der „Mengenkonfigurationen“. In diesem Kontext werden die Zustände aus S nicht mehr einzelnen Punkten sondern gewissen Teilmengen von M zugeordnet. Zur Festlegung die-

[1] Alternativ zu diesem definierenden Blocksystem können die Restriktionen auch durch ausschließende Blocksysteme oder Übergangsmatrizen beschrieben werden. Alle diese Darstellungsformen können ineinander umgeformt werden. Siehe auch [1],[7].

[2] Englisch: „subshifts of finite type“ bzw. „ft-subshifts“

ser Teilmengen gibt man sich ein lokalendliches System $\mathcal{G}$ endlicher Teilmengen von M vor. Ein Mengenkonfigurationenraum besteht dann aus allen Einfärbungen aller mit Elementen von $\mathcal{G}$ gebildeten Partitionen von M. Wie Michel in [6] zeigt, können Mengenkonfigurationenräume stets in Konfigurationenräume im Rulleschen Sinne äquivalent umgewandelt werden. Allerdings muß man bei dieser Umformung eine Vergrößerung des Alphabets und einen Verlust an Anschaulichkeit in Kauf nehmen. Man wird darum versuchen, mathematische Untersuchungen direkt an den Mengenkonfigurationenräumen vorzunehmen. Die Eigenschaften eines Mengenkonfigurationenraums (und des daraus hervorgehenden dynamischen Systems) hängen jedoch wesentlich von den Partitionen ab, welche mit Zuständen belegt werden. Daher ist es sinnvoll, sich zunächst auf die Systeme der möglichen Partitionen zu konzentrieren. Diese „Parkettsysteme" können, zusammen mit der Gruppe der Shiftabbildungen, ebenfalls als topologische dynamische Systeme betrachtet werden.

Bei der Untersuchung solcher Systeme stellt man sich eine Reihe von Fragen, die grundlegend für jede Entwicklung einer Strukturtheorie sind: Welche Eigenschaften gibt es[3]? Existieren Invarianten bezüglich geeigneter Äquivalenzrelationen oder bezüglich der Faktorabbildung? Können die Systeme entsprechend dieser Eigenschaften und Invarianten klassifiziert werden? Aussagen dieser Art für $\mathbb{Z}^1$-Subshifts macht zum einen der Hedlundsatz (z.B. [1], [2]). Er liefert Aussagen zur Existenz und Konstruierbarkeit von Faktorabbildungen. Auf der anderen Seite interessiert man sich für topologische dynamische Systeme mit den folgenden Eigenschaften:

Definition 1.1: *Ein topologisches dynamisches System (X,T) (mit dem Phasenraum X und dem Homöomorphismus T) heißt*

- *topologisch transitiv, wenn für beliebige (nichtleere) offene Mengen $U, V \subseteq X$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $U \cap T^m V \neq \emptyset$*
- *topologisch mischend, wenn für beliebige (nichtleere) offene Mengen $U, V \subseteq X$ ein $m_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $m > m_0$ gilt $U \cap T^m V \neq \emptyset$*

Mit Hilfe des *Zerlegungssatzes* (z.B. [1]) können die transitiven bzw. mischenden Untersysteme eines beliebigen $\mathbb{Z}^1$-Subshifts ermittelt werden. Im günstigsten Fall kann ein $\mathbb{Z}^1$-Subshift damit sogar als disjunkte Vereinigung transitiver oder mischender Untersysteme dargestellt werden. Die Parkettsysteme sind spezielle Mengenkonfigurationenräume und darum topologisch äquivalent zu Punktkonfigurationensystemen. Desweiteren sind Transitivität und Mischung Invarianten bezüglich dieser Äquivalenz. Also müssen die erwähnten Sätze auch für Parkettsysteme gelten. Da der Übergang mittels der Michelschen Konstruktion (siehe [6]) aber die geometrische Anschaulichkeit zerstört, die in den Parkettsystemen steckt, wird man versuchen, diese Sätze (speziell die Mischungsaussagen) direkt mit den Begriffen der Parkettsysteme zu formulieren und zu beweisen. Weiterhin ergeben sich aus der Anwendung heraus oft Fragestellungen, die sich nicht mehr mit eindimensionalen Modellen behandeln lassen. Deshalb sind Varianten dieser Sätze für zwei- und höherdimensionale Systeme von Interesse.

[3] Hierbei interessieren insbesondere topologische Eigenschaften, wie zum Beispiel Transitivität und Mischung.

Beim Hedlundsatz bereitet nun weder die Formulierung für Parkettsysteme noch der Übergang zu höheren Dimensionen besondere Probleme (z.B. [4]). Anders liegen die Verhältnisse beim Zerlegungssatz, wo insbesondere durch den Dimensionssprung $1 \rightsquigarrow 2$ so erhebliche Probleme auftreten, daß eine Einschränkung der zu betrachtenden Systeme auf solche mit überschaubarem Verhalten unbedingt nötig ist. Ziel der vorliegenden Arbeit soll es nun sein, meine diesbezüglichen Gedanken aus [4] in anschaulicher Art und Weise darzulegen und die formalen Hürden zu umgehen, welche das Verständnis von [4] möglicherweise erschweren.

2. Parkettsysteme - grundlegende Begriffsbildung

„I conigli matematici sono fatti così...“

Franco in A. Beutelspacher: „Pasta all'infinto“

Sofern nicht explizit anders gesagt, sei für alle weiteren Überlegungen die Grundmenge durch den Raum $\mathbb{Z}^2$ gegeben[4]. Mit $\langle a, b\rangle$ bezeichnet man den Quader (d.h. das Rechteck) in $\mathbb{Z}^2$ mit den Eckpunkten $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^2$, das heißt: $\langle a, b\rangle := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2\}$. Für Vektoren $a \in \mathbb{Z}^2$ und Mengen $M \subseteq \mathbb{Z}^2$ erklärt man die Shiftabbildung[5] $\sigma^a : M \longmapsto \{x + a \mid x \in M\}$. Insbesondere gelten für die Abbildungsfamilie $(\sigma^a)_{a\in\mathbb{Z}^2}$ Gruppeneigenschaften bezüglich der Hintereinanderausführung.

Zur Definition eines Parkettsystems wählt man ein lokalendliches, shiftinvariantes System $\mathcal{G}$ endlicher Teilmengen der Grundmenge $\mathbb{Z}^2$ vor und betrachtet alle daraus konstruierbaren Partitionen des $\mathbb{Z}^2$. Aus der Lokalendlichkeit und der Shiftinvarianz von $\mathcal{G}$ folgt, daß $\mathcal{G}$ dargestellt werden kann als $\mathcal{G} = \{\sigma^a G \mid a \in \mathbb{Z}^2, G \in \mathcal{G}_0\}$, wobei $\mathcal{G}_0$ eine Menge ist mit folgenden Eigenschaften:

- Jede Menge $G \in \mathcal{G}_0$ ist eine endliche Teilmenge des $\mathbb{Z}^2$ und es gilt $(0, 0) \in G$.
- Für $G, H \in \mathcal{G}_0$ existiert kein $a \in \mathbb{Z}^2$ mit $H = \sigma^a G$.

Die Menge $\mathcal{G}_0$ bezeichnet man als *Protobausteinsatz*, die Elemente von $\mathcal{G}_0$ heißen *Protobausteine*. Man betrachtet nun bestimmte Teilmengen von $\mathcal{G}$:

- Für endliche oder abzählbar unendliche Indexmenge I heißt $\mathcal{P} = \{H_i\}_{i\in I}$ *disjunkte Bausteinmenge*[6], wenn für jeden Baustein aus $\mathcal{P}$ eine eindeutige Darstellung $H_i = \sigma^{a(i)}G(i)$ existiert (mit $a(i) \in \mathbb{Z}^2$ und $G(i) \in \mathcal{G}_0$) und die Bausteine aus $\mathcal{P}$ paarweise disjunkt sind.
- Eine disjunkte Bausteinmenge $\mathcal{P}$ heißt *minimale disjunkte Überdeckung* einer Menge $E \subseteq \mathbb{Z}^2$, wenn E in der Vereinigung aller Bausteine aus $\mathcal{P}$ enthalten ist und jeder Baustein aus $\mathcal{P}$ einen nichtleeren Durchschnitt mit E hat.

[4]Eine ausführlichere Begriffsbildung, auch für Dimensionen größer als 2, findet sich in [4]

[5]Die ein- beziehungsweise mehrdimensionale Definition erfolgt analog.

[6]Durch die Betrachtung von Baustein*mengen* können die üblichen mengentheoretischen Begriffe und Operationen angewendet werden.

- Eine disjunkte Überdeckung des $\mathbb{Z}^2$ heißt *Parkettierung.*

Bemerkung 2.1: Die Shiftabbildung σ läßt sich auf Bausteinmengen sowie auf Mengen von Bausteinmengen anwenden:

$$\sigma^a\mathcal{P} = \sigma^a\{H_i\}_{i\in I} := \{\sigma^a H_i\}_{i\in I}$$
$$\sigma^a\{\mathcal{P}_j\}_{j\in J} := \{\sigma^a\mathcal{P}_j\}_{j\in J}$$

Mit dem Paar $(E, \mathcal{G}_0)$ bezeichnet man die Menge aller disjunkten Überdeckungen von $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ mit Bausteinen aus $\mathcal{G}_0$.

Definition 2.1: *Ist die Menge* $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{G}_0)$ *aller disjunkten Überdeckungen des* $\mathbb{Z}^2$ *durch* $\mathcal{G}_0$*-Bausteine nicht leer und gibt es für jeden Protobaustein* $G \in \mathcal{G}_0$ *wenigstens eine Parkettierung* $\mathcal{P}$ *aus* $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{G}_0)$*, die eine Verschiebung von* G *enthält, so wird* $\Omega^* := (\mathbb{Z}^2, \mathcal{G}_0)$ *ein* ($\mathbb{Z}^2$-)Parkettsystem[7] *(aus* $\mathcal{G}_0$*-Bausteinen) genannt.*

Man kann die Parkettsysteme entsprechend den zugrundeliegenden Protobausteintypen charakterisieren. Ein Parkettsystem $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{G}_0)$ heißt

- *Quadersystem*, wenn gilt $\mathcal{G}_0 = \{\langle 0, w^{(1)}\rangle, \langle 0, w^{(2)}\rangle, \dots, \langle 0, w^{(n)}\rangle\}$ mit $w^{(i)} \in \mathbb{N}^2$ für $1 \le i \le n$.

- *vollständiges Quadersystem*, wenn $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{G}_0)$ ein Quadersystem ist mit

$$\left.\begin{array}{r}\langle 0, (w_1, w_2)\rangle \in \mathcal{G}_0\\ \langle 0, (v_1, v_2)\rangle \in \mathcal{G}_0\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\langle 0, (w_1, v_2)\rangle \in \mathcal{G}_0\\ \langle 0, (v_1, w_2)\rangle \in \mathcal{G}_0\end{array}\right. \tag{2.1}$$

  M.a.W.: im Protobausteinsatz eines vollständigen Quadersystems treten alle möglichen Kombinationen von Breite und Höhe der enthaltenen Bausteine auf.

- *(horizontales) Stäbchensystem*, wenn gilt

$$\mathcal{G}_0 = \{\langle 0, (l_1 - 1, h - 1)\rangle, \dots, \langle 0, (l_n - 1, h - 1)\rangle\}$$

  mit $l_i, h \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Die l_i heißen die *Stäbchenlängen*, h die *Stäbchenhöhe*. Insbesondere sind Stäbchensysteme stets vollständige Quadersysteme, denn mit den Bezeichnungen von (2.1) gilt $w_2 = v_2 = h - 1$ und (2.1) ist deshalb immer erfüllt.

Abbildung 1 zeigt Beispielbausteinsätze für die obigen Systemarten.

Bemerkung 2.2: Zwischen diesen Klassen gelten die folgenden Beziehungen

$$\left\{\begin{array}{c}\text{zweidimensionale}\\ \text{Stäbchensysteme}\end{array}\right\} \subset \left\{\begin{array}{c}\text{vollständige}\\ \text{Quadersysteme}\end{array}\right\} \subset \left\{\begin{array}{c}\text{zweidimensionale}\\ \text{Quadersysteme}\end{array}\right\} \subset \left\{\begin{array}{c}\text{zweidimensionale}\\ \text{Parkettsysteme}\end{array}\right\}$$

[7] In [10] wird die Menge Ω^* mit $\pi(\mathcal{G})$ bezeichnet und dient der weiteren Definition von Mengenkonfigurationenräumen (für die dann das Symbol Ω^* verwendet wird). In diesen allgemeineren Räumen trägt jeder Baustein einer Konfiguration zusätzlich eine „Farbe" bzw. einen „Zustand". Die Parkettsysteme können daher auch als Mengenkonfigurationenräume mit einelementiger Farbmenge verstanden werden.

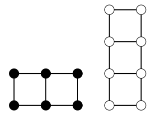
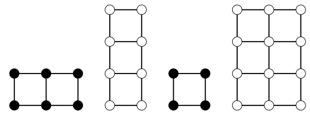
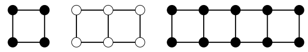
Quadersystem	vollständiges Quadersystem	Stäbchensystem
		

Abbildung 1:

und (mit den analogen Begriffen des eindimensionalen Falles)

$$\left\{\begin{array}{c}\text{eindimensionale}\\ \text{Stäbchensysteme}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{eindimensionale}\\ \text{Quadersysteme}\end{array}\right\} \subset \left\{\begin{array}{c}\text{eindimensionale}\\ \text{Parkettsysteme}\end{array}\right\}$$

Eine andere wichtige Struktur neben den Parkettierungen stellen die Blöcke dar. Sie erlauben zum einen die punktweise Beschreibungen von Parkettierungen ohne dabei die geometrischen Aspekte aus den Augen zu verlieren. Auf der anderen Seite bilden die Blöcke auch die Grundlage für eine Topologie auf Ω^*.

Im Fall der Subshifts (siehe z.B. [7]) wird unter einem Block B_E eine Einfärbung der *endlichen* Menge (der sogenannten Basis) $E \subset \mathbb{Z}^2$ verstanden. Dem entsprechend werde bei den Parkettsystemen als Block eine minimale Überdeckung der *endlichen* Menge E bezeichnet. Das entscheidende Merkmal welches die Blöcke von allgemeinen Überdeckungen abhebt, ist die Endlichkeit der Basis E.

Definition 2.2: *Für die endliche Menge $E \subset \mathbb{Z}^2$ wird jede minimale disjunkte Überdeckung $B \in (E, \mathcal{G}_0)$ als (ein möglicher) Block (mit der Basis E) bezeichnet. Ein Block heißt*

- *zentriert, wenn $E = -E$*
- *Quaderblock, wenn E ein Quader in $\mathbb{Z}^2$ ist, das heißt $E = \langle a, b \rangle$ mit $a, b \in \mathbb{Z}^2$*
- *k-Block, wenn (für $k \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}^2$) $E = \langle a - k\mathfrak{e}, a + k\mathfrak{e} \rangle$*

Bemerkung 2.3: **a)** Die Menge $(E, \mathcal{G}_0)$ aller minimalen disjunkten Überdeckungn von E ist auch die Menge aller *möglichen* Blöcke mit der Basis E.

b) Man betrachte nun zum Beispiel den in Abbildung 2 gezeigten (möglichen) Block A mit der Basis $E = \{(0,0), (1,0), (2,0)\}$ (in der Abbildung mit Schraffur unterlegt). Er kann in keiner Parkettierung enthalten sein, da sich mit den im Protobausteinsatz gegebenen gegebenen Bausteinen das Loch an der Position $(1,1)$ nicht ausfüllen läßt. Es gibt also mögliche Blöcke, die in keiner Parkettierung auftreten können. Für ein gegebenes Parkettsystem bezeichnet $\mathcal{B}_E$ die Menge aller in diesem Sinne tatsächlich im Parkettsystem auftretenden Blöcke mit der Basis E.

Von besonderem Interesse ist in diesem Zusammenhang $\mathcal{B}_k := \mathcal{B}_{\langle -k,k \rangle}$, die Menge der zentrierten k-Blöcke.

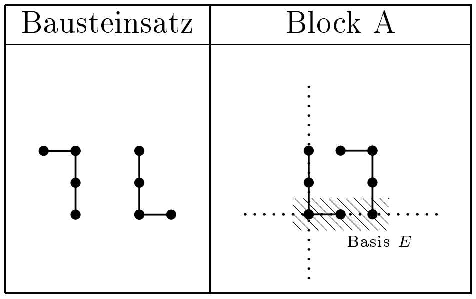


Abbildung 2:

Satz 2.1: *Quaderblöcke aus Quaderbausteinen können stets zu Parkettierungen fortgesetzt werden.*

Beweisgedanke[8] Ein gegebener Quaderblock mit der Basis $\langle a, b \rangle$ kann zu einem neuen Quaderblock mit der Basis $\langle a - \mathfrak{e}, b + \mathfrak{e} \rangle$ fortgesetzt werden, indem man nacheinander an jeden Blockrand Kopien geeigneter Bausteine anfügt (siehe Abbildung 3). Durch sukzessive Wiederholung dieses Verfahrens erhält man eine Folge von Blöcken, die gegen eine Parkettierung aus $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{G}_0)$ konvergiert.

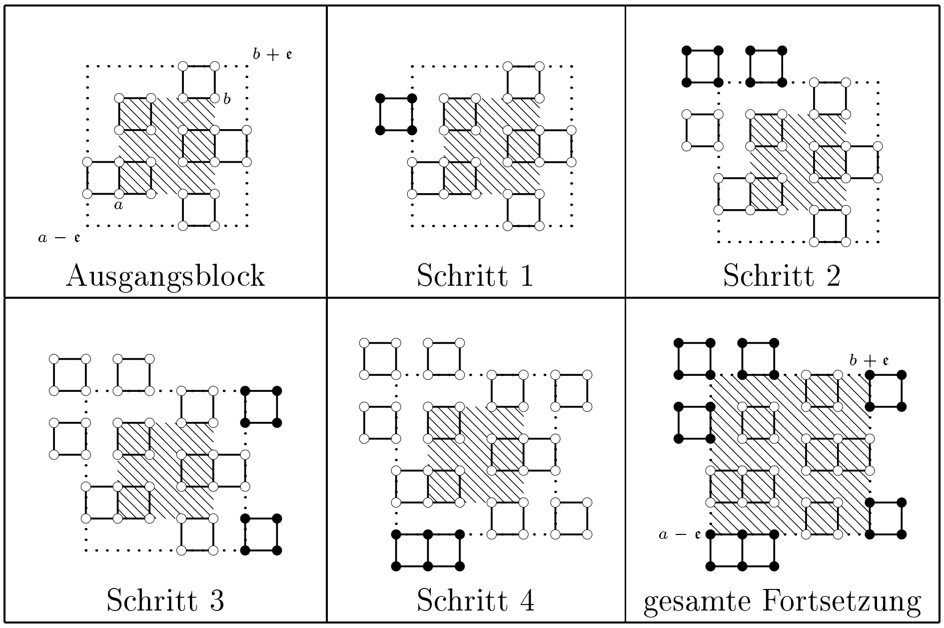


Abbildung 3:

Definition 2.3: *Sei die endliche Teilparkettierung (m.a.W. der Block) B gegeben. Die Menge*

$$[B] := \{\mathcal{P} \in \Omega^* \mid B \subset \mathcal{P}\}$$

heißt Zylinder in Ω^*. In Anlehnung an die Begriffsbildung bei den Blöcken bezeichnet man $[B]$ als

[8] Zur vollständigen Darstellung des Beweises vergleiche [4].

- *zentrierten Zylinder, falls B ein zentrierter Block ist*
- *k-Zylinder, falls $B \in \mathcal{B}_k$ ist.*

Eigenschaft 2.1: **a)** Für die Blöcke A und B mit $A \subseteq B$ gilt $[B] \subseteq [A]$.

b) Für $[A], [B] \subset \Omega^*$ mit $[A] \cap [B] \neq \emptyset$ gilt $[A] \cap [B] = [A \cup B]$.

c) Für alle endlichen Mengen $E \subset \mathbb{Z}^2$ ist $([B])_{B \in \mathcal{B}_E}$ eine Partition von Ω^* (insbesondere bilden die k-Zylinder für beliebiges, festes $k \in \mathbb{N}$ eine Partition von Ω^*).

Satz 2.2: *Die Familie der (zentrierten) Zylinder ist Basis der Zylindertopologie auf Ω^*.*

Beweis. Zum Beweis soll Satz 2.9 aus [8] herangezogen werden. Die Menge aller Blöcke in Ω^* bezeichnet man mit

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{\substack{E \subset \mathbb{Z}^2 \\ \mathrm{card}(E) < \infty}} \mathcal{B}_E$$

a) Zu zeigen ist: $\bigcup\limits_{B \in \mathcal{Z}} [B] = \Omega^*$. Wegen Eigenschaft 2.1 c) gilt für beliebiges, festes $k \in \mathbb{N}$ $\bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}_k} [B] = \Omega^*$. Wegen $\mathcal{B}_k \subset \mathcal{Z}$ gilt also die Behauptung.

b) Zu zeigen ist, daß aus $B_1, B_2 \in \mathcal{Z}$ und $\mathcal{P} \in [B_1] \cap [B_2]$ folgt

$$\exists B_3 \in \mathcal{Z} \quad \text{mit} \quad \mathcal{P} \in [B_3] \subseteq [B_1] \cap [B_2]$$

Seien also $B_1 \in \mathcal{B}_k$ und $B_2 \in \mathcal{B}_l$ mit $k \leq l$ und $\mathcal{P} \in [B_1] \cap [B_2]$. Wegen $B_1 \subset \mathcal{P}$, $B_2 \subset \mathcal{P}$ und $k \leq l$ gilt $B_1 \subseteq B_2$. Damit ist $B_1 \cup B_2 = B_2$ und

$$\mathcal{P} \in [B_1] \cap [B_2] = [B_1 \cup B_2] = [B_2] \subseteq [B_1] \cap [B_2]$$

Die Behauptung gilt also mit $B_3 = B_2$.

□

Bemerkung 2.4: **a)** Jeder Zylinder in der Zylindertopologie ist auch abgeschlossen. Wegen Eigenschaft 2.1 c) ist das Komplement zentrierter Zylinder offen. Für $A \in \mathcal{B}_k$ gilt nämlich

$$\Omega^* \backslash [A] = \bigcup_{B \in B_k} [B] \backslash [A] = \bigcup_{B \in B_k \backslash \{A\}} [B] \quad \text{ist offene Menge}$$

Die Abgeschlossenheit beliebiger Zylinder $\bigcup\limits_{i \in I} [A_i]$ zeigt man wie folgt (man beachte, daß es stets ein k gibt, so daß für alle $i \in I$ gilt $A_i \in \mathcal{B}_k$; wegen der Endlichkeit der $\mathcal{B}_k$ ist auch die Indexmenge I endlich):

$$\Omega^* \backslash \bigcup_{i \in I} [A_i] = \bigcap_{i \in I} \Omega^* \backslash [A_i] \quad \text{ist offene Menge}$$

Aus der Abgeschlossenheit der zentrierten Zylinder A_i, folgt, daß ihr Komplement offen ist, und der endliche Durchschnitt offener Mengen ist wiederum offen.

b) Man betrachte $\mathcal{B}_0$ zusammen mit der diskreten Topologie als topologischen Raum. Nach dem Satz von Tychonow ist dann im Produktraum

$$\mathcal{B}^* = \left\{ \bigcup_{z\in\mathbb{Z}^2} \sigma^z B_z \quad (B_z \in \mathcal{B}_0) \right\}$$

eine Produkttopologie erklärt. Man zeigt, daß die Zylindertopologie mit dieser Produkttopologie übereinstimmt.

Satz 2.3: Ω^* *ist kompakt bezüglich der Zylindertopologie.*

Beweis. **a)** Zu zeigen: Ω^* ist quasikompakt[9]. Der Produktraum $\mathcal{B}^* = \sigma^{\mathbb{Z}^2}\mathcal{B}_0$ ist nach dem Satz von Tychonow quasikompakt. Die Elemente von $\mathcal{B}^*\backslash\Omega^*$ sind gerade die nicht-disjunkten Bausteinmengen. Für $\mathcal{P} \in \mathcal{B}^*\backslash\Omega^*$ gilt

$$\mathcal{P} = \bigcup_{z\in\mathbb{Z}^2} \sigma^z B_z \in \mathcal{B}^*\backslash\Omega^* \implies \exists a, b \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } \sigma^a B_a \cap \sigma^b B_b \neq \emptyset$$

Mit $E = \{a, b\}$, $O_a = \{B_a\}$, $O_b = \{B_b\}$ hat man

$$\mathcal{P} \in \bigcap_{z\in E\subset\mathbb{Z}^2} \bigcup_{B\in O_z} \{\mathcal{P} \in \mathcal{B}^* \mid \sigma^z B \subset \mathcal{P}\} = V(\mathcal{P})$$

und es gilt

$$\mathcal{B}^*\backslash\Omega^* \subseteq \bigcup_{\mathcal{P}\in\mathcal{B}^*\backslash\Omega^*} V(\mathcal{P})$$

Wegen der Wahl von E, O_a, O_b sind beliebige $\mathcal{Q} \in V(\mathcal{P})$ nicht-disjunkt. Es gilt

$$\bigcup_{\mathcal{P}\in\mathcal{B}^*\backslash\Omega^*} V(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{B}^*\backslash\Omega^*$$

Man hat also mit

$$\mathcal{B}^*\backslash\Omega^* = \bigcup_{\mathcal{P}\in\mathcal{B}^*\backslash\Omega^*} V(\mathcal{P})$$

eine Darstellung von $\mathcal{B}^*\backslash\Omega^*$ durch Basismengen. $\mathcal{B}^*\backslash\Omega^*$ ist also eine offene Menge in der Produkttopologie und Ω^* darum eine abgeschlossen Menge. Als abgeschlossene Teilmenge eines quasikompakten Raumes ist Ω^* quasikompakt.

b) Zu zeigen: Ω^* ist Hausdorff-Raum[10]. Seien $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \Omega^*$ mit $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$. Dann gibt es eine Menge $E \subset \mathbb{Z}^2$ so, daß Blöcke $A_1, A_2 \in \mathcal{B}_E$ existieren mit $A_1 \subset \mathcal{P}_1$, $A_2 \subset \mathcal{P}_2$ und $A_1 \neq A_2$. Nun ist $[A_1]$ Umgebung von $\mathcal{P}_1$ und $[A_2]$ Umgebung von $\mathcal{P}_2$ und es gilt $[A_1], [A_2] \in ([B])_{B\in\mathcal{B}_E}$ und $[A_1] \neq [A_2]$. Wegen Eigenschaft 2.1 c) ist $([B])_{B\in\mathcal{B}_E}$ eine Partition von Ω^*. $[A_1]$ und $[A_2]$ sind also *disjunkte* Umgebungen von $\mathcal{P}_1$ bzw. $\mathcal{P}_2$.

□

[9] überdeckungskompakt
[10] T_2-Raum

Satz 2.4: a) *Ω^* ist invariant bezüglich der Shiftabbildung σ.*

b) *Die Shiftabbildung σ ist ein Homöomorphismus.*

Beweis. **a)** Sei $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ und $\mathcal{P} \in (E, \mathcal{G}_0)$. Dann gilt im allgemeinen $\sigma^a\mathcal{P} \in (\sigma^a E, \mathcal{G}_0)$. Da aber $\sigma^a\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}^2$ ist, gilt für jedes $\mathcal{P} \in \Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \mathcal{G}_0)$ und jedes $a \in \mathbb{Z}^2$ insbesondere $\sigma^a\mathcal{P} \in (\mathbb{Z}^2, \mathcal{G}_0) = \Omega^*$, also die behauptete Invarianz von Ω^*.

b) Die Surjektivität ist klar, denn für jedes $P \in \Omega^*$ gibt es ein $\mathcal{Q} \in \Omega^*$ mit $\sigma^a\mathcal{Q} = \mathcal{P}$ (nämlich gerade $\mathcal{Q} = \sigma^{-a}\mathcal{P}$). Auch die Injektivität ist leicht zu zeigen: aus $\sigma^a\mathcal{P} = \sigma^a\mathcal{Q}$ folgt $\sigma^{-a}\sigma^a\mathcal{P} = \sigma^{-a}\sigma^a\mathcal{Q}$ und somit $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$. Als letzte Eigenschaft bleibt die Stetigkeit zu zeigen: sei die offene Menge

$$U = \bigcup_{i \in I} [A_i\,]$$

mit den zentrierten Blöcken A_i gegeben (das heißt, die $[A_i\,]$ sind Basismenge). Für das Urbild $\sigma^{-a}U$ gilt dann

$$\sigma^{-a}U = \sigma^{-a} \bigcup_{i \in I} [A_i\,] = \bigcup_{i \in I} [\sigma^{-a}A_i\,]$$

Die $[\sigma^{-a}A_i\,]$ sind ebenfalls offene Mengen und auch $\sigma^{-a}U$ ist eine offene Menge. Die Shiftabbildung ist also eine stetige Bijektion (und ebenso ihre Inverse, welche ebenfalls eine Shiftabbildung ist).

□

Aus dem bisher gesagten leitet sich ab, daß mit Ω^* als Phasenraum, der Zylindertopologie $\mathcal{O}^*$ und der Abbildungsgruppe $(\sigma^a)_{a \in \mathbb{Z}^2}$ ein topologisches dynamisches System $(\Omega^*, \mathcal{O}^*, (\sigma^a)_{a \in \mathbb{Z}^2})$ definiert ist (Der Kürze wegen stehe hierfür auch das Symbol Ω^* alleine, da über die Topologie Klarheit besteht und auf eventuelle Einschränkungen der Dynamik an betreffender Stelle hingewiesen wird).

3. Zum Zerlegungssatz für zweidimensionale Stäbchensysteme

Schließlich ist es auch möglich, daß Originalität daraus entsteht, daß zwar überall Stereotypen verwendet werden, daß also auf keiner Ebene Erfindungen gemacht wurden, daß aber allein schon die Verbindung sehr unterschiedlicher heterogener Stereotype einen Effekt von Originalität hervorruft.

Stanislaw Lem: „Philosophie des Zufalls II“

Als Ausgangspunkt unserer Untersuchungen zum Zerlegungssatz für zweidimensionale Stäbchensysteme soll zunächst der bekannte Zerlegungssatz von Denker-Grillenberger-Sigmund betrachtet werden. Daraus werden dann später die Formulierungen für ein- und zweidimensionale Stäbchensysteme entwickelt.

Sei ein eindimensionaler Subshift Λ mit der Grundmenge $\mathbb{Z}$ und der Farbmenge S gegeben. Zur Vorbereitung des Zerlegungssatzes wird in [1] zunächst eine Unterteilung der Farbmenge vorgenommen.

- Erster Bestandteil ist die Menge S_W der sogenannten wandernden Farben. Das sind Farben, welche in keiner Konfiguration mehrfach auftreten können. Durch S_W wird die sogenannte wandernde Menge $\Lambda_W := \{x \in \Lambda \mid \exists n \in \mathbb{Z} \text{ mit } x_n \in S_W\}$ definiert.

- In der Restmenge $S_0 := S \backslash S_W$ wird (für beliebiges aber festes $d \in \mathbb{N}$) die sogenannte d-Gitteräquivalenz erklärt: zwei Farben $i, j \in S_0$ heißen d-Gitter-äquivalent, wenn es Konfigurationen $x, y \in \Lambda$ und Konstanten $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ gibt mit:

  $$x_{n_1} = i \text{ und } x_{n_1+m_1 d} = j$$
  $$y_{n_2} = j \text{ und } y_{n_2+m_2 d} = i$$

  Man erhält eine Einteilung von S_0 in d-Gitteräquivalenzklassen $S_1^d, \ldots, S_{r_d}^d$. Mit Hilfe dieser Äquivalenzklassen und des d-Gitters $\{nd\}_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{Z}$ kann man Teilsysteme $\Lambda_i^d := \{x \in \Lambda \mid x_{nd} \in S_i^d \ (\forall n \in \mathbb{Z})\}$ von Λ erklären. Λ_i^d enthält demnach genau diejenigen Konfigurationen, deren d-Gitterpunkte x_{nd} nur mit Farben aus S_i^d belegt ist.

- Die Menge $\Lambda_0 := \Lambda \backslash \Lambda_W$ erweist sich als ft-Subshift. Mit $\tilde{\Lambda}$ wird die nichtwandernde Menge[11] von Λ bezeichnet. Auch $\tilde{\Lambda}$ ist ein ft-Subshift und außerdem die nichtwandernde Menge von Λ_0.

- In [1] wird gezeigt, daß jede Konfiguration $x \in \Lambda_0 \backslash \tilde{\Lambda}$ auf dem d-Gitter die Farben mindestens zweier verschiedener Äquivalenzklassen enthält. Man sieht dann sofort, daß $\Lambda_i^d \subseteq \tilde{\Lambda}$ gilt (für $d \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, \ldots, r_d\}$).

[11] Als nichtwandernde Menge bezeichnet man die Menge der nichtwandernden Punkte. Ein Punkt $x \in X$ eines dynamischen Systems (X, T) heißt nichtwandernd, wenn es für jede Umgebung $U(x)$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $T^n(x) \in U(x)$.

Nach diesen Vorüberlegungen zur Struktur von $\Lambda\backslash\tilde{\Lambda}$ liefert der eigentliche Zerlegunssatz (Theorem (17.11) in [1]) eine Darstellung von $\tilde{\Lambda} \subseteq \Lambda_0 \subseteq \Lambda$ durch die Mengen Λ_i^d (siehe Abbildung 4):

Satz 3.1 (Zerlegungssatz, Denker-Grillenberger-Sigmund [1]):

a) *Jede der Mengen Λ_i^d ist topologisch transitiv bezüglich der Shiftsabbildung σ^d.*

b) *Für $d' \mid d$ und $1 \leq i \leq r_d$, $1 \leq j \leq r_{d'}$ gilt $\Lambda_j^{d'} \subseteq \Lambda_i^d$ oder $\Lambda_j^{d'} \cap \Lambda_i^d = \emptyset$.*

c) *Für jedes $d \geq 1$ besteht die Familie $(\Lambda_i^d)_{1\leq d\leq r_d}$ aus paarweise disjunkten Mengen, die offen sind in der Topologie auf $\tilde{\Lambda}$. Es gilt $\tilde{\Lambda} = \bigcup_{i=1}^{r_d} \Lambda_i^d$, das heißt, $(\Lambda_i^d)_{1\leq d\leq r_d}$ ist eine Partition von $\tilde{\Lambda}$. Für $d = 1$ bezeichnet man $\Lambda_i := \Lambda_i^d$ als „basic sets[12]“.*

d) *Für jeden „basic set“ Λ_i $(1 \leq i \leq r_{d'},\ d \geq 1)$ setzt man $K_i^d := \{1 \leq j \leq r_{d'} \mid \Lambda_j^d \subseteq \Lambda_i\}$. Dann gilt:*
- *i)* $\forall\, j \in K_i^d \;\; \exists\, k \in K_i^d$ *mit* $\sigma(\Lambda_j^d) = \Lambda_k^d$. *Man kann die Indizes aus* K_i^d *so anordnen, daß* $K_i^d = \{t_1, \ldots, t_f\}$ *mit* $\sigma(\Lambda_{t_j}^d) = \Lambda_{t_{j+1 \bmod f}}^d$
- *ii)* $\Lambda_i = \bigcup_{j\in K_i^d} \Lambda_j^d$
- *iii)* $\exists\, d > 1$ *so, daß* Λ_j^d *für alle* $j \in K_i^d$ *topologisch mischend ist bezüglich* σ^d.

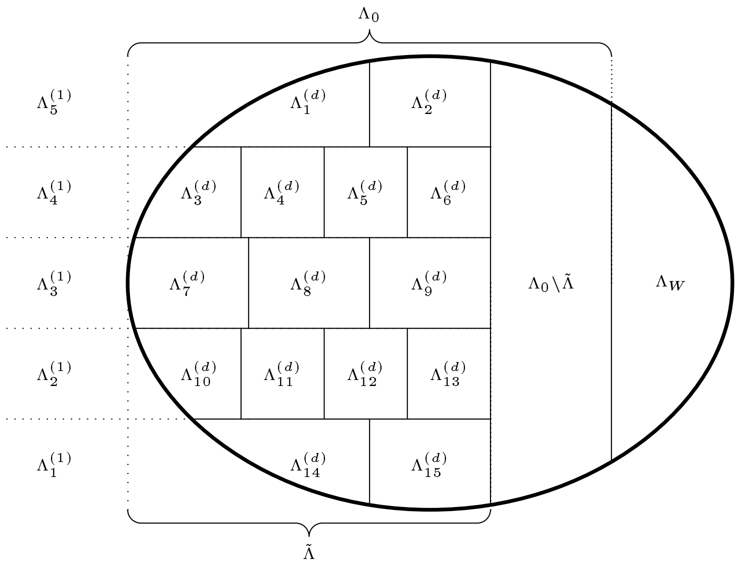


Abbildung 4:

Beim Beweis des Zerlegungssatzes sind die Beweise zu Transitivität beziehungsweise Mischung am aufwendigsten. Aus topologischen Gründen reicht es aus, die entsprechenden in der Definition 1.1 geforderten Beziehungen für Basismengen zu zeigen. Sowohl für Subshifts als auch für Parkettsysteme sind dies Zylinder $[A]$ (dabei sei A ein geeigneter

[12] An dieser Stelle soll die in [1] benutzte englische Bezeichnung verwendet werden, insbesondere um Verwechslungen mit dem topologischen Begriff „Basismenge“ zu vermeiden.

Block im entsprechenden Kontext). Ersetzt man nun T durch die konkrete Transformation, das heißt die Shiftabbildung σ^d, und ersetzt man weiterhin X durch die Menge, deren Transitivität gezeigt werden soll, und geht man zur Blockschreibweise über, so können die Beziehungen aus Definition 1.1 in die folgende Form gebracht werden:

Transitivität für alle Blöcke A, B mit $A \subset x_A \in \Lambda_i^d$, $B \subset x_B \in \Lambda_i^d$ $\exists\, m \in \mathbb{N}$ und $\exists y \in \Lambda_i^d$ mit $A \cup \sigma^{md} B \subset y$

Mischung für alle Blöcke A, B mit $A \subset x_A \in \Lambda_i^d$, $B \subset x_B \in \Lambda_i^d$ $\exists\, m_0 \in \mathbb{N}$ so daß für alle $m > m_0$ gilt $\exists y_m \in \Lambda_i^d$ mit $A \cup \sigma^{md} B \subset y_m \in \Lambda_i^d$

Zur Transitivität: zur Konstruktion solch eines y muß insbesondere ein m gefunden werden, so daß eine Auffüllung zwischen A und $\sigma^{md}B$ existiert (Abbildung 5). Solch ein m und die entsprechende Auffüllung existieren, wenn die Farben am rechten Rand von A und am linken Rand von B äquivalent sind. Wegen der Definition der Mengen Λ_i^d ist dies der Fall für alle Blöcke A und B, deren Ränder auf dem d-Gitter liegen. Da sich außerdem beliebige Blöcke A und B (aus Konfigurationen aus Λ_i^d) stets einbetten lassen in Blöcke $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$, deren Ränder auf dem d-Gitter liegen, erweist sich Λ_i^d als transitiv. Bei einer Formulierung eines ähnlichen Satzes für Parkettsysteme wird man versuchen,

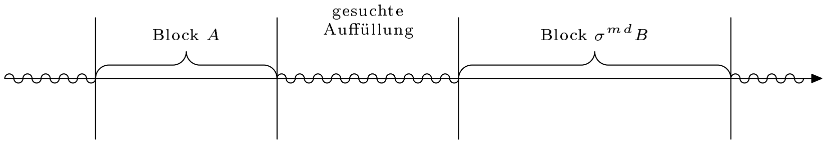


Abbildung 5:

wesentliche Gedanken des obigen Vorgehens beizubehalten. Insbesondere wird man sich hier auf die Begriffe d-Gitter, d-Gitteräquivalenz und d-Gitterbelegung konzentrieren. Einen Äquivalenzbegriff könnte man sowohl für Protobausteine als auch für Blöcke entwickeln. Allerdings kann kann man keinen geeigneten Begriff finden, der die Belegung der d-Gitterpunkte mit Protobausteinen beschreibt. Bausteine, die aus mehreren Punkten bestehen, können nämlich einen bestimmten Punkt aus der Grundmenge auf ganz verschiedene Arten überdecken. Die entsprechenden Lageinformationen werden bei einer Beschreibung durch Blöcke automatisch erfaßt. Die Formulierung eines Zerlegungssatzes für Parkettsysteme wird daher auf den k-Blöcken aufbauen.

3.1. $\mathbb{Z}^1$-Stäbchensysteme

Gegeben sei nun ein eindimensionales Stäbchensystem $\Omega^* = (\mathbb{Z}, \mathcal{G}_0)$ mit den Stäbchenlängen l_1 bis l_n. Für $d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ betrachte man das d-Gitter $d\mathbb{Z} := \{ad\}_{a\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{Z}$. Für alle Parkettierungen $\mathcal{P} \in \Omega^*$ und jeden Punkt $a \in \mathbb{Z}$ gibt es einen Block $A \in \mathcal{B}_k$ mit $\sigma^a A \subset \mathcal{P}$, das heißt, man erklärt für jeden Punkt (insbesondere für diejenigen des d-Gitters) eine Belegung mit einem k-Block aus $\mathcal{B}_k$.

In $\mathbb{Z}^1$-Stäbchensystemen sind Quaderblöcke (und insbesondere k-Blöcke) stets Intervalle, können also durch ihre Randkoordinaten hinreichend beschrieben werden. Um Doppelzählung von Punkten zu vermeiden soll unter dem linken Rand $R(A)$ der kleinste im Block enthaltene $\mathbb{Z}^1$-Punkt verstanden werden und unter dem rechten Rand $\bar{R}(A)$ der kleinste *nicht* im Block enthalte Punkt *rechts* des Blockes (siehe Abbildung 6). Mit anderen Worten: Blöcke werden der besseren Handhabbarkeit wegen als halboffene Intervalle im $\mathbb{Z}$ betrachtet. Für den k-Block $A \in \mathcal{B}_k$ der den Punkt $a \in \mathbb{Z}$ belegt, gilt natürlich $R(\sigma^a A) = R(A) + a$ und $\bar{R}(\sigma^a A) = \bar{R}(A) + a$. Betrachte man nun zwei Blöcke A und

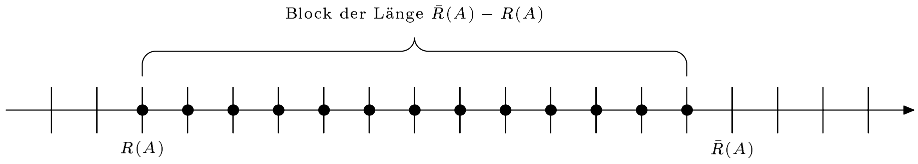


Abbildung 6:

B, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit B rechts von A liege. Eine Auffüllung zwischen A und B ist nun eine lückenlose Bausteinmenge der Länge $R(B) - \bar{R}(A)$ welche aus $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ Bausteinen der Längen $l_1, l_2, \dots, l_n$ besteht. Da im eindimensionalen Fall die Reihenfolge der Bausteine keine Rolle spielt, sondern nur die lückenlose Auffüllung wichtig ist, kann man schreiben

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i = R(B) - \bar{R}(A)$$

Die Berechnung solcher Auffüllungen wird erleichtert, wenn man zunächst formal auch negative Koeffizienten α_i zuläßt. Sind in einer Auffüllung alle α_i größer als null, so wird darauf im Bedarfsfall mit der Bezeichnung *echte* Auffüllung hingewiesen. Für k-Blöcke $A, B \in \mathcal{B}_k$, welche die Punkte ad und $ad + md$ im d-Gitters belegen, gilt speziell

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i = R(B) + md - \bar{R}(A)$$

beziehungweise

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i - md = R(B) - \bar{R}(A) \tag{3.1}$$

In der zweiten Schreibweise handelt es sich dabei um eine diophantische Gleichung bezüglich der Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, m$. Diese ist in ganzen Zahlen lösbar, wenn gilt $\mathrm{ggT}(l_1, \dots, l_n, d) \mid R(B) - \bar{R}(A)$ (siehe etwa [5], S.24).

Bemerkung 3.1: Möglicherweise sind in einer Lösung einige Koeffizienten α_i oder sogar m kleiner als null. Man kann aber die Lösung so umformen, daß Bedingungen der Form $\alpha_r \geq c$ erfüllt werden. Dazu werden die beteiligten Blöcke A und B um eine Vielfaches von d auseinandergerückt und der entstehende Freiraum mit Bausteinen des Typs r ausgefüllt. Genauso wird die Bedingung $m \geq c$ behandelt, allerdings kann man in diesem Fall mit einem beliebigen Bausteintyp auffüllen. Abbildung 7 soll diese Idee für $\mathcal{G}_0 = \{(0,1), (0,1,2,3)\}$ und $d = 3$ verdeutlichen.

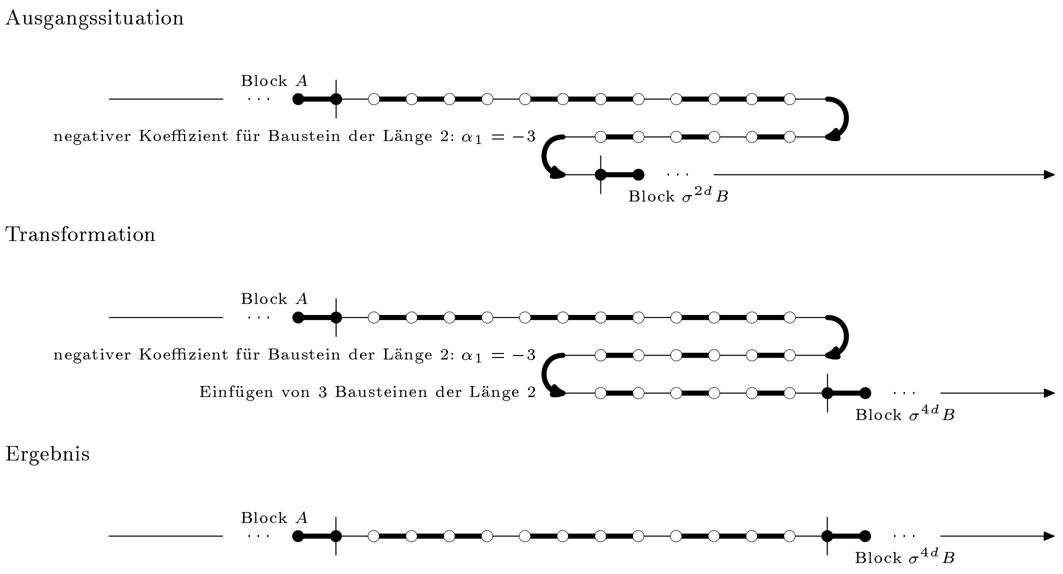


Abbildung 7:

Für ein geeignetes $s \in \mathbb{N}$ läßt sich das Verfahren formal folgendermaßen ausdrücken:

$$
\begin{aligned}
R(B) - \bar{R}(A) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i - md \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i + s\,\mathrm{kgV}(l_r, d) - s\,\mathrm{kgV}(l_r, d) - md \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i + s_1 l_r - s_2 d - md \\
&= \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i l_i - \bar{m} d
\end{aligned}
$$

Dabei ist $\bar{\alpha}_i = \alpha_i$ (für $i \neq r$), $\bar{\alpha}_r = \alpha_r + s_1$ und $\bar{m} = m + s_2$. Wurde $s \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $s\,\mathrm{kgV}(l_r, d) = s_1 l_r \geq (c - \alpha_r) l_r$, so gilt $\bar{\alpha}_r = \alpha_r + s_1 \geq \alpha_r + c - \alpha_r = c$. Für $s\,\mathrm{kgV}(l_r, d) = s_2 d \geq (c - m)d$ hingegen gilt $\bar{m} = m + s_2 \geq m + c - m = c$. Durch sukzessive Anwendung dieses Schrittes kann jede Auffüllung in eine sogenannte *echte* Auffüllung (mit nichtnegativen Koeffizienten) umgewandelt werden. Man darf sogar beliebige Ausdrücke der Gestalt

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i l_i - \tilde{m} d = 0$$

auf Gleichungen vom Typ (3.1) addieren. Das ist zum Beispiel im zweidimensionalen Fall nötig, wenn mehrere Gleichungen des Typs (3.1) mit der gleichen Verschiebung erfüllt werden müssen, aber für eine von ihnen eine Nebenbedingung gestellt wurde.

Desweiteren ist es ausreichend, die Blöcke durch einen ihrer Ränder zu charakterisieren, z.B. den linken. Bestehe der Block A zum Beispiel aus jeweils β_i Bausteinen der Länge

l_i, d.h. es gelte

$$\bar{R}(A) - R(A) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i l_i$$

Es genügt dann, eine Auffüllung $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i l_i$ zwischen $R(A)$ und $R(B)$ zu finden, die die Nebenbedingungen $\gamma_i \geq \beta_i$ erfüllt. Dann ist $\sum_{i=1}^{n} (\gamma_i - \beta_i) l_i$ eine (echte) Auffüllung zwischen $\bar{R}(A)$ und $R(B)$. Andererseits kann man auf eine Auffüllung $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i$ zwischen $\bar{R}(A)$ und $R(B)$ die Länge $\sum_{i=1}^{n} \beta_i l_i$ von A addieren und erhält mit $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) l_i$ eine Auffüllung zwischen den linken Rändern von A und B (siehe Abbildung 8). Eine Lösung der Gleichung (3.1) existiert also genau dann, wenn gilt

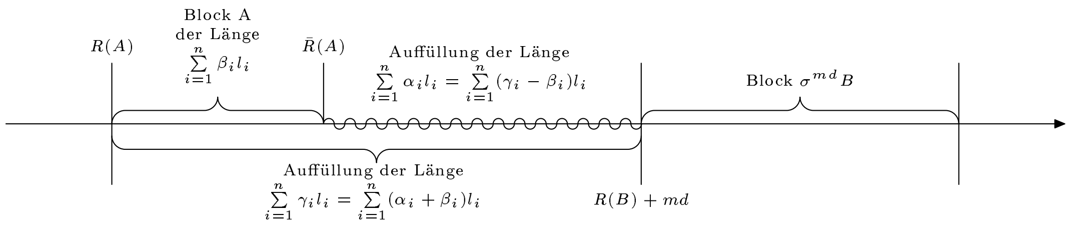


Abbildung 8:

$\operatorname{ggT}(l_1, \ldots, l_n, d) \mid R(B) - R(A)$.

Dabei handelt es sich um eine Äquivalenzrelation für die Blöcke in $\mathcal{B}_k$, denn es gilt

Reflexivität Gilt $A = B$, dann ist natürlich $R(A) = R(B)$ und darum auch $\operatorname{ggT}(l_1, \ldots, l_n, d) \mid R(B) - R(A) = 0$.

Symmetrie Stehe A in Relation zu B, d.h. es gelte $\operatorname{ggT}(l_1, \ldots, l_n, d) \mid R(B) - R(A)$. Wegen der Teilbarkeitsregel $x \mid y \implies x \mid -y$ gilt dann auch $\operatorname{ggT}(l_1, \ldots, l_n, d) \mid R(A) - R(B)$. Deshalb steht auch B in Relation zu A.

Transitivität Wenn

$$\operatorname{ggT}(l_1, \ldots, l_n, d) \mid R(B) - R(A) \quad \text{und} \quad \operatorname{ggT}(l_1, \ldots, l_n, d) \mid R(C) - R(B)$$

dann

$$\operatorname{ggT}(l_1, \ldots, l_n, d) \mid R(C) - R(B) + R(B) - R(A) = R(C) - R(A)$$

Das Blocksystem $\mathcal{B}_k$ kann also in Äquivalenzklassen ϑ_1 bis ϑ_Θ eingeteilt werden. Jede Äquivalenzklasse ϑ_i definiert eine Menge

$$\Omega_{\vartheta_i} := \{\mathcal{P} \in \Omega^* \mid \text{in } \mathcal{P} \text{ ist jeder } d\text{-Gitterpunkt mit einem Block aus } \vartheta_i \text{ belegt}\}$$

Aufgrund der Reflexivität der Äquivalenzklassenrelation existiert bei Stäbchensystemen kein Pendant zu den wandernden Farben. Wegen der Symmetrie der betrachteten Relation gibt es außerdem keine Stäbchenparkettierung, die auf dem d-Gitter mehr als *eine* Äquivalenzklasse besitzt. Man kann nun den folgenden Zerlegungssatz für eindimensionale Stäbchensysteme formulieren:

Satz 3.2: a) *Die Familie* $(\Omega_{\vartheta_i})_{1\le i\le\Theta}$ *bildet eine Partition des Parkettsystems* Ω^*.

b) *Für jedes* $1 \le i \le \Theta$ *ist die Menge* Ω_{ϑ_i} *transitiv bezüglich der Shifts* $(\sigma^{md})_{m\in\mathbb{Z}}$.

c) *Ist die zugrundegelegte Gitterweite* d *eine Linearkombination der Stäbchenlängen* $l_1, \ldots, l_n$*, so sind die* Ω_{ϑ_i} *sogar* σ^d*-mischend.*

Beweis. **a)** Die Partitionseigenschaft folgt aus der Definition der Ω_{ϑ_i} und der Vollständigkeit der Äquivalenzklassenzerlegung von $\mathcal{B}_k$.

b) Zu zeigen ist:

$$\forall\, A, B \text{ (mit } A \subset \mathcal{P}_A \in \Omega_{\vartheta_i},\ B \subset \mathcal{P}_B \in \Omega_{\vartheta_i}) \quad \exists\, m \in \mathbb{N}, \mathcal{Q} \in \Omega_{\vartheta_i} \quad \text{mit} \quad A \cup \sigma^{md} B \subset \mathcal{Q}$$

Man betrachte zwei solche Blöcke A und B, wobei A ohne Beschränkung der Allgemeinheit links von B liege. Es gibt dann stets Blöcke $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ mit Basen $[\alpha_1 d - k, \alpha_2 d + k]$ beziehungsweise $[\beta_1 d - k, \beta_2 d + k]$ und mit $A \subseteq \tilde{A} \subset \mathcal{P}_A$ beziehungsweise $B \subseteq \tilde{B} \subset \mathcal{P}_B$. Die Blöcke $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ enthalten insbesondere Teilblöcke mit den Basen $[\alpha_2 d - k, \alpha_2 d + k]$ beziehungsweise $[\beta_1 d - k, \beta_1 d + k]$, welche Punkte im d-Gitter belegen. Wegen der Konstruktion von Ω_{ϑ_i} sind diese Teilblöcke äquivalent. Deshalb existiert eine Auffüllung zwischen ihnen und natürlich auch zwischen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ und zwischen $A \subseteq \tilde{A}$ und $B \subseteq \tilde{B}$. Die entstehende Bausteinmenge kann wegen Satz 2.1 zu einer Parkettierung fortgesetzt werden.

c) Sei $d = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i l_i$. Kennt man (mit den Bezeichnungen des vorangegangenen Punktes) eine Auffüllung zwischen A und $\sigma^{md}B$, so kann diese Auffüllung durch Einfügen von jeweils γ_i Bausteinen der Länge l_i zu einer Auffüllung zwischen A und $\sigma^{(m+1)d}B$ erweitert werden.

□

Bemerkung 3.2: Greift man noch einmal den Begriff „basic set“ aus dem Zerlegungssatz für Subshifts auf, so stellt man bei den Stäbchensystemen fest, daß nur ein einziger „basic set“ existiert, nämlich Ω^* selbst. Der Grund dafür liegt darin, daß für $d = 1$ in $\mathcal{B}_k$ nur eine einzige Äquivalenzklasse existiert. Außerdem weiß man sofort, daß ein Stäbchensystem Ω^* stets transitiv ist.

3.2. $\mathbb{Z}^2$-Stäbchensysteme

Nun soll versucht werden, die Erkenntnisse und Vorgehensweisen des vorangegangenen Abschnitts auf zweidimensionale Stäbchensysteme auszudehnen. Dazu sei nun ein zweidimensionales Stäbchensystem $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{G}_0)$ mit den Stäbchenlängen l_1 bis l_n und der Stäbchenhöhe h gegeben. Zur Vereinfachung der Untersuchungen soll die Dynamik zunächst auf die horizontale Achsenrichtung, das heißt die Richtung der Bausteinlängen beschränkt bleiben, das heißt es sollen die Shifts der Form $\sigma^a := \sigma^{(a,0)}$ (mit $a \in \mathbb{Z}$) betrachtet werden. Wegen des skalaren Parameters ist es nun möglich, die zugehörige Abbildungsgruppe $(\sigma^a)_{a\in\mathbb{Z}}$ zu ordnen und die Mischung wie im eindimensionalen Fall durch vollständige Induktion zu beweisen. Die Beschränkung auf die achsenparallelen Shifts erleichtert das Finden von Auffüllung *zwischen* zwei Blöcken.

Für $d, d' \in \mathbb{N}$ versteht man unter dem (d, d')-Gitter die Menge

$$(d, d')\mathbb{Z}^2 := \{(ad, bd')\}_{a,b\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{Z}^2$$

Für eine beliebige Konstante $c \in \mathbb{Z}$ heißt

$$\begin{array}{lll} & \{(ad, cd')\}_{a\in\mathbb{Z}} \subset (d, d')\mathbb{Z}^2 & \text{Gitterzeile} \\ \text{und} & \{(cd, ad')\}_{a\in\mathbb{Z}} \subset (d, d')\mathbb{Z}^2 & \text{Gitterspalte} \end{array}$$

des (d, d')-Gitters. Für den Fall $h > 1$ stellt man fest, daß übereinanderliegende „Bausteinschichten“ durch vertikal verschobene Bausteine untereinander verzahnt sein können. Wegen der gemeinsamen Bausteinhöhe setzen sich solche vertikalen Verschiebungen von Bausteinen nach oben und unten durch die gesamte Parkettierung fort. Eine vertikale Verschiebung kann also durch eine einzelne horizontale Koordinate repräsentiert werden. Man benutzt dazu im weiteren die *linke* Randkoordinate des nächsten *rechts* der Verschiebung liegenden Bausteins. Der (horizontale) Abstand vertikaler Verschiebungen ist immer eine Linearkombination der Bausteinlängen. Aus diesen Beobachtungen leiten sich drei offensichtliche Grundtypen von Quaderblöcken ab (*einfache* Beispiele zeigt die Abbildung 9; die weißen Bausteine sollen Glättungsansätze skizzieren und gehören nicht zu den Blöcken):

Definition 3.1: a) *Typ-$\mathcal{A}$-Blöcke enthalten eine vertikale Bausteinverschiebung.*

b) *Typ-$\mathcal{B}$-Blöcke enthalten zwar selber keine vertikalen Verschiebungen, sind aber mit ihnen verträglich. Das bedeutet, daß ihre rechten und linken Ränder durch Anfügen endlich vieler Bausteine „geglättet“ werden können.*

c) *Die sonstigen Blöcke, die keine vertikalen Verschiebungen enthalten und bei bei denen diese „Glättung“ nicht möglich ist, bezeichnet man als Typ-$\mathcal{C}$-Blöcke.*

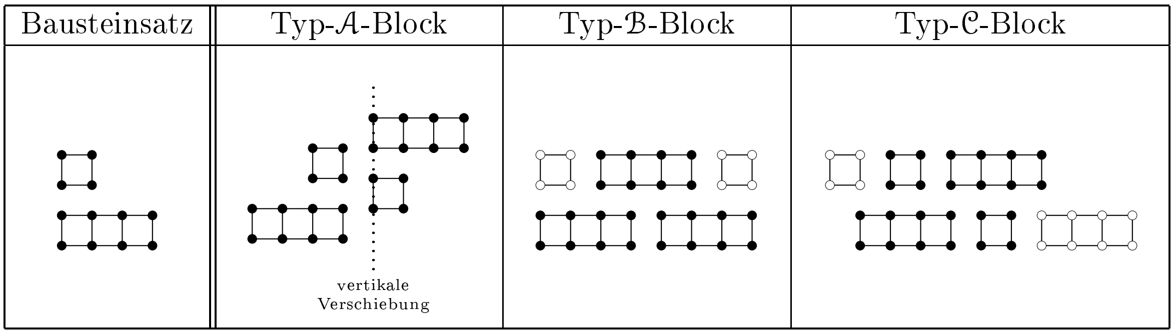


Abbildung 9:

Zunächst soll der Begriff der Bezugskante eingeführt werden, mit dessen Hilfe die für Typ-$\mathcal{B}$-Blöcke geforderte „Glättung“ der Bausteinränder in eine mathematische Form gebracht werden kann. Dabei sollen in Analogie zum eindimensionalen Fall die Symbole $R(A)_j$ für die linken Ränder und $\bar{R}(A)_j$ für die rechten Ränder benutzt werden.

Die Indizierung ist nötig, da in zweidimensionalen Stäbchensystemen Blöcke „gezackte“ Ränder haben können und dann jede Bausteinschicht ihre eigenen Randkoordinaten besitzt. Desweiteren kann sich für Typ-$\mathcal{A}$-Blöcke die Zahl der Bausteinschichten am linken und am rechten Rand unterscheiden. „Glättung“ der Bausteinränder bedeutet dann, daß der gegeben Block A (mit der Basis $\langle a, b\rangle$) transformiert wird in einen Block B mit einer Basis $\langle a - c_1\mathfrak{e}^{(1)}, b + c_2\mathfrak{e}^{(2)}\rangle$ sowie $R(B)_j = R(B)_{j+1}$ und $\bar{R}(B)_j = \bar{R}(B)_{j+1}$. In Verallgemeinerung dieses Gedankens soll nun unter einer *Bezugskante* eine Spalte im $\mathbb{Z}^2$ verstanden werden, die von den Rändern eines gegebenen Blockes jeweils den „Abstand“ (in horizontaler Richtung) einer Linearkombination der Bausteinlängen besitzt.

Definition 3.2: *Bezeichne J die Anzahl der Bausteinschichten am linken Rand des Blockes A. L heißt <u>Bezugskante</u> des Blockes A, wenn für jede Bausteinschicht j gilt:*

$$R(A)_j + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} l_i = L \qquad (\forall j \in \{1, \ldots, J\}; \alpha_{i,j} \in \mathbb{Z}) \tag{3.2}$$

Bemerkung 3.3: **a)** Es existieren natürlich unendlich viele Bezugskanten für einen Block. Denn: ist L Bezugskante eines gegebenen Blockes, so ist auch

$$L' = L + \sum_{i=1}^{n} \beta_i l_i \qquad (\beta_i \in \mathbb{Z})$$

eine Bezugskante für diesen Block.

b) Gleichung (3.2) gilt insbesondere für die in den Typ-$\mathcal{A}$-Blöcken enthaltenen Verschiebungen. Unter dem Gesichtspunkt der Existenz von Bezugskanten gibt es also zwei wesentliche Sorten von Blöcken. Zum einen die Typ-$\mathcal{A}$- und Typ-$\mathfrak{B}$-Blöcke (für die Bezugskanten existieren) und zum anderen die Typ-$\mathfrak{C}$-Blöcke (welche keine Bezugskanten besitzen). Ist dagegen das entscheidende Kriterium zur Unterscheidung der Blöcke das Vorliegen einer vertikalen Verschiebung, so unterscheiden sich die Typ-$\mathcal{A}$-Blöcke auf der einen Seite von den Typ-$\mathfrak{B}$- und Typ-$\mathfrak{C}$-Blöcken auf der anderen Seite. Im Sinne dieser Unterscheidungen sollen in der weiteren Arbeit auch die Bezeichnungen Typ-$\mathcal{A}\mathfrak{B}$-Blöcke (Blöcke vom Typ-$\mathcal{A}$ *oder* Typ-$\mathfrak{B}$) beziehungweise Typ-$\mathfrak{B}\mathfrak{C}$-Blöcke (Blöcke vom Typ-$\mathfrak{B}$ *oder* Typ-$\mathfrak{C}$) verwendet werden.

c) In (3.2) können, völlig gleichberechtigt, sowohl die linken als auch die rechten Ränder des betrachteten Blockes verwendet werden. Wegen a) reicht es, diese Behauptung für irgendeine Bezugskante zu zeigen. Für Typ-$\mathcal{A}$-Blöcke ist die Aussage klar - man benutze die im Block enthaltene vertikale Verschiebung als Bezugskante. Alle anderen Blöcke haben am rechten und linken Rand die gleiche Anzahl von Bausteinschichten, so daß man schreiben kann

$$\bar{R}(A)_j = R(A)_j + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} l_i \qquad (\forall j \in J; \alpha_{i,j} \in \mathbb{Z})$$

Setzt man das in Gleichung (3.2) ein, so ist die Aussage wiederum klar.

d) Die Ränder eines Blockes können genau dann „geglättet“ werden, wenn Bezugskanten für den Block existieren. Sei L eine Bezugskante des Blockes A und sei (3.2) ohne

Beschränkung der Allgemeinheit für die rechten Ränder formuliert.

$$L = \bar{R}(A)_j + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} l_i \qquad (\forall j \in J; \alpha_{i,j} \in \mathbb{Z})$$

Wegen a) ist auch

$$\tilde{L} := L + \sum_{i=1}^{n} \beta l_i = \bar{R}(A)_j + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} l_i + \sum_{i=1}^{n} \beta l_i = \bar{R}(A)_j + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i,j} + \beta) l_i$$

eine Bezugskante von A und kann von den rechten Rändern von A aus durch *Anfügen* von Bausteinen erreicht werden, wenn nur β hinreichend groß gewählt wurde. Für die linken Ränder kann man analog argumentieren.

e) Bezugskanten für einen Block A existieren genau dann, wenn gilt

$$\forall j \in J \backslash \{\max J\} \qquad \mathrm{ggT}(l_1, \dots, l_n) \mid R(A)_{j+1} - R(A)_j$$

Entsprechend den Bemerkungen zu Gleichung (3.1) gilt dann nämlich

$$R(A)_j - R(A)_{j+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j+1} l_i$$

Daraus folgt

$$R(A)_1 = R(A)_j + \sum_{\iota=1}^{j-1} \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,\iota} l_i = R(A)_j + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{j,i} l_i \quad \text{mit} \quad \gamma_{j,i} = \sum_{\iota=1}^{j-1} \beta_{i,\iota}$$

und $R(A)_1$ ist Bezugskante für A.

Satz 3.3: *A und B seien zwei Typ-$\mathcal{AB}$-Blöcke. Genau dann existiert eine Auffüllung zwischen A und $\sigma^{\tilde{m}d}B$ ($\tilde{m} \in \mathbb{N}$), wenn es Bezugskanten L_A von A und L_B von B gibt mit:*

$$L_B - L_A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i - md \qquad (\alpha_i, m \in \mathbb{N}) \tag{3.3}$$

Beweis. **a)** Sei eine Auffüllung zwischen den Blöcken A und $\sigma^{\tilde{m}d}B$ gegeben.

Fall 1: Zwischen den Blöcken liege eine Bausteinverschiebung (weil sich zum Beispiel die Bausteinschichten der Blöcke in Anzahl oder vertikaler Ausrichtung unterscheiden). Diese Bausteinverschiebung ist eine Bezugskante von A und soll deshalb mit L_A bezeichnet werden. L_A ist aber auch Bezugkante von $\sigma^{\tilde{m}d}B$, das heißt eine um $\tilde{m}d$ verschobene Bezugskante von B. Es gilt also $L_A = L_B + \tilde{m}d$. Für L_A und L_B gilt also (3.3) mit $m = \tilde{m}$ und $\alpha_i = 0$.

Fall 2: Nun liege zwischen den Blöcken keine Bausteinverschiebung (insbesondere stimmen dann Anzahl J und Ausrichtung der Bausteinschichten überein)[13]. Wegen der vorausgesetzten Auffüllung zwischen A und B gilt dann:

$$\bar{R}(A)_j + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i,j} l_i = R(B)_j + \tilde{m}d \qquad (\gamma_{i,j} \in \mathbb{N}; j \in \{1, \dots, J\})$$

Für eine beliebige Bausteinschicht $j \in \{1, \dots, J\}$ und beliebige Bezugskanten L_A und L_B gilt:

$$\bar{R}(A)_j + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} l_i = L_A \qquad (\alpha_{i,j} \in \mathbb{Z})$$
$$R(B)_j + \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,j} l_i = L_B \qquad (\beta_{i,j} \in \mathbb{Z})$$

Setzt man diese Beziehungen ineinander ein, so erhält man

$$\begin{aligned} L_B - L_A &= R(B)_j + \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,j} l_i - \bar{R}(A)_j - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} l_i \\ &= \bar{R}(A)_j - \tilde{m}d + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i,j} l_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,j} l_i - \bar{R}(A)_j - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} l_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \delta_i l_i - \tilde{m}d \quad \text{mit} \quad \delta_i = \gamma_{i,j} + \beta_{i,j} - \alpha_{i,j} \end{aligned}$$

Dieses Resultat kann unter Beachtung der Nebenbedingungen $\delta_i \geq 0$ in die Form (3.3) gebracht werden. Die Berücksichtigung von Nebenbedingungen erfolgt genau wie im eindimensionalen Fall für Gleichung (3.1).

b) Gegeben seien nun die Blöcke A und B, für deren Bezugskanten L_A und L_B nach Voraussetzung Gleichung (3.3) gelte:

$$L_B + md = L_A + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i l_i \qquad (m, \gamma_i \in \mathbb{N})$$

Man gehe nun über zu den Bezugskanten

$$\tilde{L}_A = L_A + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i \quad \text{und} \quad \tilde{L}_B = L_B + \sum_{i=1}^{n} \beta_i l_i$$

[13] Für Blöcke aus demselben Blocksystem $\mathcal{B}_k$ kann die Zahl der Bausteinschichten nur zwei verschiedene Werte annehmen. Wenn zwischen zwei solchen Blöcken keine Verschiebung liegt, so bilden die beiden Blöcke zusammen mit der dazwischen liegenden Auffüllung einen Block, der aus übereinandergelegten, unverzahnten Bausteinschichten besteht. Daraus leitet sich dieselbe Ausrichtung der Bausteinschichten ab. Für die Basen der Blöcke gilt $E_1 = \langle (a,b) - ke, (a,b) + ke \rangle$ und $E_2 = \langle (a + \tilde{m}d, b) - ke, (a + \tilde{m}d, b) + ke \rangle$, sie überdecken also dieselben Bausteinschichten, woraus dieselbe Anzahl von Bausteinschichten folgt.

wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\tilde{L}_A$ rechts von A und $\tilde{L}_B$ links von B liege. Zwischen dem rechten Rand von A und $\tilde{L}_A$ befinde sich eine echte Auffüllung, ebenso zwischen $\tilde{L}_B$ und dem linken Rand von B. Es gilt dann (mit $\delta_i = \gamma_i + \beta_i - \alpha_i$)

$$\tilde{L}_B + md = \tilde{L}_A - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i l_i + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i l_i = \tilde{L}_A + \sum_{i=1}^{n} \delta_i l_i$$

Durch Berücksichtigung von Nebenbedingungen bezüglich δ_i erhält man eine echte Auffüllung zwischen den Bezugskanten. Zusammen mit der echten Auffüllung zwischen dem rechten Rand von A und $\tilde{L}_A$ und der echten Auffüllung zwischen $\tilde{L}_B$ und dem linken Rand von B hat man also eine (echte) Auffüllung zwischen A und B.

$\square$

Bemerkung 3.4: Analog wie im eindimensionalen Fall beweist man, daß eine Lösung von (3.3) genau dann existiert, wenn gilt:

$$\mathrm{ggT}(l_1, \ldots, l_n, d) \mid L_B - L_A \tag{3.4}$$

Daraus leitet sich genau wie im eindimensionalen Fall ab, daß die Auffüllbarkeit eine Äquivalenzrelation zwischen Typ-$\mathcal{AB}$-Blöcken ist.

Es soll nun ein Äquivalenzbegriff für Typ-$\mathcal{C}$-Blöcke entwickelt werden. Dabei soll die horizontale Verschiebbarkeit der Blockzeilen ausgenutzt werden.

Definition 3.3: *Gegeben sei der Typ-$\mathcal{BC}$-Block A. Dieser enthält keine vertikalen Verschiebungen und besteht darum aus unverzahnten Bausteinschichten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien dies N Stück. Die Transformation Δ, welche die j-te Bausteinzeile um die Distanz Δ_j horizontal verschiebt, ist durch den Vektor $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_N) \in \mathbb{Z}^N$ gegeben. Insbesondere gilt:*

$$R(\Delta(A))_j = R(A)_j + \Delta_j \qquad (\forall j \in \{1, \ldots, N\})$$

und

$$\bar{R}(\Delta(A))_j = \bar{R}(A)_j + \Delta_j \qquad (\forall j \in \{1, \ldots, N\})$$

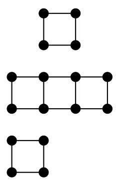
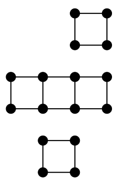
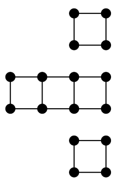
Block A	$\Delta(A)$ für $\Delta = (1,0,1)$	$\Delta_A(A)$
		

Abbildung 10:

Bemerkung 3.5: **a)** Die Inverse von $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_N)$ ist gegeben durch

$$\Delta^{-1} := (-\Delta_1, \ldots, -\Delta_N)$$

b) Für jeden Typ-$\mathcal{BC}$-Block A definiert man eine Δ-Transformation

$$\Delta_A := (\Delta_{A,1}, \dots, \Delta_{A,N}) \quad \text{mit} \quad \Delta_{A,j} = \max_{\iota=1}^{N} \bar{R}(A)_\iota - \bar{R}(A)_j \qquad (j = 1, \dots, N)$$

Dabei gilt: $\Delta_A(A)$ ist stets Typ-$\mathcal{B}$-Block, denn

$$\bar{R}(\Delta_A(A))_j = \bar{R}(A)_j + \Delta_{A,j} = \max_{\iota=1}^{N} \bar{R}(A)_\iota \qquad (\forall j \in \{1, \dots, N\})$$

ist Bezugskante für $\Delta_A(A)$.

Satz 3.4: *A und B seien zwei Typ-$\mathcal{BC}$-Blöcke mit der gleichen Zahl N von Bausteinschichten und derselben unteren Randkoordinate. Es existiere eine Auffüllung zwischen A und $\sigma^a B$ ($a \in \mathbb{N}$). Dann existiert auch eine Auffüllung zwischen $\Delta(A)$ und $\sigma^a \Delta(B)$ für beliebige Transformation $\Delta \in \mathbb{Z}^N$.*

Beweis. Die Ränder von A und B werden durch die Transformation Δ in der gleichen Weise verändert. Deshalb erhält Δ die Abstände zwischen zwei Rändern, woraus die Behauptung folgt. □

Bemerkung 3.6: Die Auffüllbarkeit ist für Typ-$\mathcal{C}$-Blöcke eine Äquivalenzrelation.

Reflexivität Die Reflexivität der Auffüllbarkeitsrelation für Typ-$\mathcal{B}$-Blöcke liefert, daß eine Auffüllung zwischen $\Delta_A(A)$ und $\sigma^{md}\Delta_A(A)$ existiert. Wegen Satz 3.4 existiert dann eine Auffüllung zwischen

$$\Delta_A^{-1}(\Delta_A(A)) = A \qquad \text{und} \qquad \Delta_A^{-1}(\sigma^{md}\Delta_A(A)) = \sigma^{md}\Delta_A^{-1}(\Delta_A(A)) = \sigma^{md}A$$

Symmetrie Aus einer Auffüllung zwischen A und $\sigma^{md}B$ folgt mit Satz 3.4 die Existenz einer Auffüllung zwischen $\Delta_A(A)$ und $\sigma^{md}\Delta_A(B)$. Wegen der Symmetrie der Auffüllbarkeitsrelation für Typ-$\mathcal{B}$-Blöcke folgt dann die Existenz einer Auffüllung zwischen $\Delta_A(B)$ und $\sigma^{\tilde{m}d}\Delta_A(A)$. Wegen Satz 3.4 existiert dann eine Auffüllung zwischen

$$\Delta_A^{-1}(\Delta_A(B)) = B \qquad \text{und} \qquad \Delta_A^{-1}(\sigma^{md}\Delta_A(A)) = \sigma^{md}\Delta_A^{-1}(\Delta_A(A)) = \sigma^{md}A$$

Transitivität Aus den Auffüllungen zwischen A und B sowie B und C folgt mit Satz 3.4 die Existenz von Auffüllungen zwischen $\Delta_B(A)$ und $\sigma^{md}\Delta_B(B)$ sowie zwischen $\Delta_B(B)$ und $\sigma^{\tilde{m}d}\Delta_B(C)$. Aus der Transitivität der Auffüllbarkeitsrelation für Typ-$\mathcal{B}$-Blöcke folgt dann die Existenz einer Auffüllung zwischen $\Delta_B(A)$ und $\sigma^{\hat{m}d}\Delta_B(C)$. Wegen Satz 3.4 existiert dann eine Auffüllung zwischen

$$\Delta_B^{-1}(\Delta_B(A)) = A \qquad \text{und} \qquad \Delta_B^{-1}(\sigma^{md}\Delta_B(C)) = \sigma^{md}\Delta_B^{-1}(\Delta_B(C)) = \sigma^{md}C$$

Bemerkung 3.7: Die Sätze 3.3 und 3.4 begründen also eine Einteilung von $\mathcal{B}_k$ in d-Gitteräquivalenzklassen.

Aus den bisherigen Erkenntnissen können einige grundlegende Eigenschaften von zweidimensionalen Stäbchenparkettierungen abgeleitet werden.

Satz 3.5 (Struktursatz): *Betrachtet werde eine zweidimensionale Stäbchenparkettierung $\mathcal{P}$:*

a) *Sei in $\mathcal{P}$ der Punkt $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$ mit einem Typ-$\mathcal{A}$-Block belegt. Dann sind auch alle anderen Punkte der Spalte $\{(a_1, y)\}_{y\in\mathbb{Z}}$ mit Typ-$\mathcal{A}$-Blöcken belegt.*

b) *Sei in $\mathcal{P}$ der Punkt $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$ mit einem Typ-$\mathcal{C}$-Block belegt. Dann sind auch alle anderen Punkte der Zeile $\{(x, a_2)\}_{x\in\mathbb{Z}}$ mit Typ-$\mathcal{C}$-Blöcken belegt.*

c) *Keine Stäbchenparkettierung enthält gleichzeitig Typ-$\mathcal{A}$-und Typ-$\mathcal{C}$-Blöcke.*

d) *Je zwei in derselben Gitterzeile von $\mathcal{P}$ befindliche Blöcke gehören derselben Äquivalenzklasse an.*

Beweis. **a)** Bezeichne A den Typ-$\mathcal{A}$-Block am Punkt (a_1, a_2). Weil A ein k-Block ist, besitzt er die Basis $\langle(a_1 - k, a_2 - k), (a_1 + k, a_2 + k)\rangle$. Jede in A enthaltene vertikale Bausteinverschiebung besitzt also die horizontale Position x mit $a_1 - k \le x < a_1 + k$ und erstreckt sich über die gesamte Parkettierung. Die Blöcke der Spalte $\{(a_1, y)\}_{y\in\mathbb{Z}}$ besitzen die Basen $\langle(a_1 - k, y - k), (a_1 + k, y + k)\rangle$ und enthalten darum dieselben vertikalen Verschiebungen wie A.

b) Bezeichne A den Typ-$\mathcal{C}$-Block am Punkt (a_1, b) und sei der Punkt (a_2, b) mit einem Typ-$\mathcal{AB}$-Block B belegt. Im Fall, daß sich die vertikalen unteren Koordinaten von A und B unterscheiden, befindet sich zwischen den Blöcken eine vertikale Verschiebung. Diese wäre Bezugskante sowohl für B als auch für A, was nach Definition der Typ-$\mathcal{C}$-Blöcke nicht möglich ist. Also besitzen A und B dieselbe untere vertikale Koordinate und dieselbe Anzahl von Bausteinzeilen. Für jeden rechten Rand $\bar{R}(A)_j$ von A gibt es also einen korrespondierenden linken Rand $R(B)_j$ von B und es gilt

$$R(B)_j = \bar{R}(A)_j + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} l_i$$

Weil B ein Typ-$\mathcal{AB}$-Block ist, gibt es eine Bezugskante

$$L = R(B)_j + \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,j} l_i = \bar{R}(A)_j + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} l_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,j} l_i$$

Es gilt damit

$$L = \bar{R}(A)_j + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i,j} + \beta_{i,j}) l_i$$

und L ist auch Bezugskante für A, was der Voraussetzung widerspricht, A sei ein Typ-$\mathcal{C}$-Block.

c) Angenommen, der Punkt $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$ sei mit einem Typ-$\mathcal{A}$-Block belegt und am Punkt $(c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^2$ befinde sich ein Typ-$\mathcal{C}$-Block. Wegen a) ist der Block am Punkt (a_1, c_2) ein Typ-$\mathcal{A}$-Block. Wegen b) muß der Punkt (a_1, c_2) mit einem Typ-$\mathcal{C}$-Block belegt werden, das heißt die Annahme führt zum Widerspruch.

d) A und B seien Blöcke derselben Gitterzeile, das heißt A belege denPunkt (ad, bd') und B belege den Punkt $((a+m)d, bd')$. Zwischen A und B existiert nach Voraussetzung eine Auffüllung (denn beide sind in der selben Parkettierung enthalten), woraus ihre Äquivalenz folgt.

□

Satz 3.6: *Zwei (im (d, d')-Gitter) vertikal benachbarte Typ-$\mathcal{AB}$-Blöcke mit mindestens einer gemeinsamen Bausteinreihe besitzen dieselbe Menge von Bezugskanten.*

Beweis. Für den Speziallfall der Typ-$\mathcal{A}$-Blöcke ist die Aussage klar, denn die als Bezugskante benutzte vertikale Verschiebung in den Typ-$\mathcal{A}$-Blöcken erstreckt sich vertikal durch die gesamte Parkettierung.

Seien A und B also vertikal benachbarte Typ-$\mathcal{B}$-Blöcke. Sei L_A eine Bezugkante von A und sei L_B Bezugskante des Blockes B. Es gilt:

$$R(A)_j + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} l_i = L_A \qquad (\forall j \in J_A; \alpha_{i,j} \in \mathbb{Z})$$
$$R(B)_j + \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,j} l_i = L_B \qquad (\forall j \in J_B; \beta_{i,j} \in \mathbb{Z})$$

Man kann also ohne Beschränkung der Allgemeinheit schreiben

$$L_A - L_B = R(A)_{\max J_A} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,\max J_A} l_i - R(B)_1 - \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,1} l_i$$

Die gemeinsame Bausteinreihe bedeutet, ebenfalls ohne Einschränkung der Allgemeinheit, daß $R(A)_{\max J_A} = R(B)_1$. Damit hat man:

$$L_A - L_B = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,\max J_A} l_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,1} l_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i,\max J_A} - \beta_{i,1}) l_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i l_i$$

Mit Bemerkung 3.3 a) ist also L_B auch Bezugskante von A und L_A Bezugskante des Blockes B. □

Bemerkung 3.8: Satz 3.6 liefert zusammen mit Satz 3.3, daß im (d, d')-Gitter vertikal benachbarte Typ-$\mathcal{AB}$-Blöcke mit gemeinsamer Bausteinreihe derselben Äquivalenzklasse angehören. Unter Berücksichtigung von Satz 3.5 d) bedeutet das, daß in Parkettierungen ohne Typ-$\mathcal{C}$-Blöcke alle Blöcke auf dem (d, d')-Gitter derselben Äquivalenzklasse angehören. Stäbchenparkettierungen ohne Typ-$\mathcal{A}$-Blöcke bestehen hingegen aus (einem oder mehreren) vertikal zusammenhängenden (Gitter-)Zeilenbereichen, die jeweils aus Typ-$\mathcal{B}$-Blöcken derselben Äquivalenzklasse bestehen. Existieren mehrere solche Äquivalenzklassenbereiche, so sind diese durch Gitterzeilen aus Typ-$\mathcal{C}$-Blöcken voneinander getrennt.

Satz 3.7: *Gegeben seien die Blöcke*

$$\begin{array}{llll} & A & \textit{mit der Basis} & \langle (a_1 d - k, c_1 d' - k), (a_2 d + k, c_2 d' + k) \rangle \\ \textit{und} & B & \textit{mit der Basis} & \langle (b_1 d - k, c_1 d' - k), (b_2 d + k, c_2 d' + k) \rangle \end{array}$$

Sind für $j \in \{c_1, \dots, c_2\}$ die an den Punkten (a_2d, jd') und (b_1d, jd') befindlichen k-Blöcke äquivalent und besitzen (im (d, d')-Gitter) vertikal benachbarte k-Blöcke mindestens eine gemeinsame Bausteinreihe, dann gibt es eine Verschiebung md so, daß eine Auffüllung zwischen A und $\sigma^{md}B$ existiert.

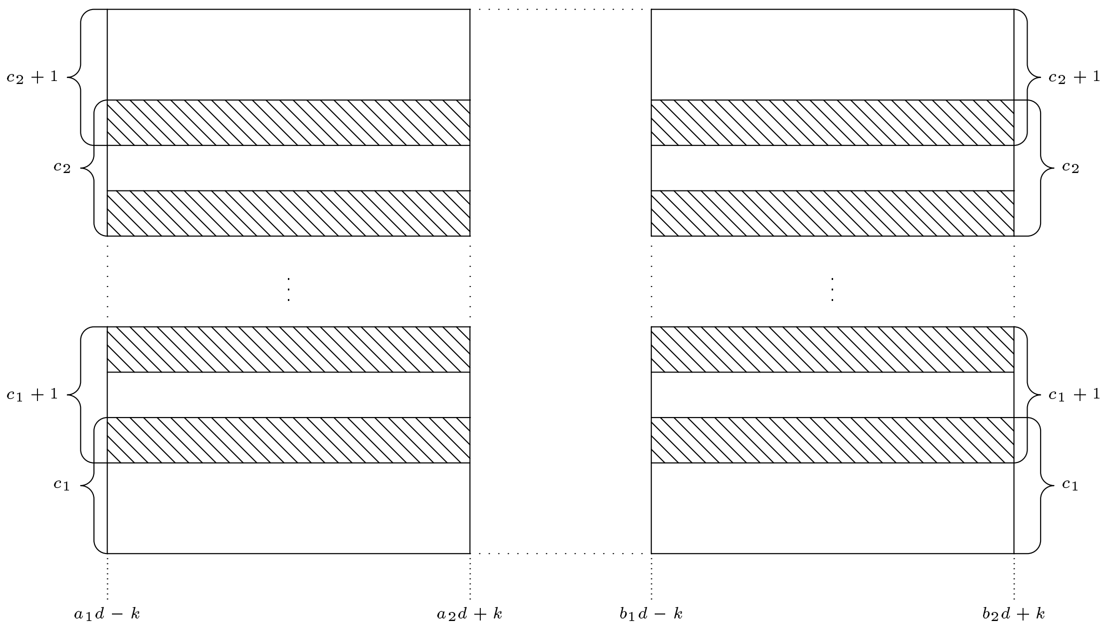


Abbildung 11:

Beweis. Die Basen der vorausgesetzten Blöcke A bzw. B sind in Abbildung 11 skizziert. Darin ist für den unten folgenden Induktionsschritt bereits die Gitterzeile $c_2 + 1$ eingetragen. Die schraffierten Bereiche sollen die gemeinsame Bausteinreihe der vertikal benachbarten Blöcke andeuten.

Mit A_y beziehungsweise B_y werde der in A bzw. B enthaltene k-Block an der Gitterposition (a_2d, yd') beziehungsweise (b_1d, yd') bezeichnet.

Seien zunächst für alle $y \in \{c_1, \dots, c_2\}$ die zugehörigen A_y und B_y Typ-$\mathcal{AB}$-Blöcke. Satz 3.6 liefert dann, daß alle Blöcke A_y bzw. B_y dieselben Bezugskanten besitzen. Insbesondere kann dann für alle Blockpaare (A_y, B_y) die in Satz 3.3 geforderte Gleichung (3.3) bezüglich derselben Bezugskanten gelöst werden. Damit kann für alle betroffenen Gitterzeilen dieselbe Verschiebung md sichergestellt werden.

Befinden sich unter den A_y beziehungsweise B_y Typ-$\mathfrak{C}$-Blöcke, so soll der Beweis durch Induktion nach der Anzahl der Gitterzeilen $q = c_2 - c_1$ geführt werden.

Induktionsanfang Für $q = 0$ (das heißt $c_1 = c_2$) ist die Behauptung wegen der vorausgesetzten Äquivalenz der Blöcke in denselben Gitterzeilen klar.

Induktionsvoraussetzung Die Behauptung gelte für die Gitterzeilenanzahl $q = c_2 - c_1 \geq 0$.

Induktionsschritt Seien nun Blöcke

$$\begin{array}{lll} & A & \text{mit der Basis} \quad \langle(a_1 d - k, c_1 d' - k), (a_2 d + k, (c_2+1)d' + k)\rangle \\ \text{und} & B & \text{mit der Basis} \quad \langle(b_1 d - k, c_1 d' - k), (b_2 d + k, (c_2+1)d' + k)\rangle \end{array}$$

mit der Höhe $q+1$ gegeben. In ihnen sind die Blöcke

$$\begin{array}{lll} & \tilde{A} & \text{mit der Basis} \quad \langle(a_1 d - k, c_1 d' - k), (a_2 d + k, c_2 d' + k)\rangle \\ \text{und} & \tilde{B} & \text{mit der Basis} \quad \langle(b_1 d - k, c_1 d' - k), (b_2 d + k, c_2 d' + k)\rangle \end{array}$$

mit der Höhe q enthalten. Für vertikal benachbarte Blöcke wurde eine gemeinsame Bausteinreihe vorausgesetzt. Dann bezeichne $\bar{R}$ den rechten Rand der gemeinsamen Bausteinreihe zwischen den Blöcken A_{c_2} und A_{c_2+1} sowie R den linken Rand der gemeinsamen Bausteinreihe von B_{c_2} und B_{c_2+1}. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Verschiebung $\tilde{m}d$ und eine dazugehörige Auffüllung zwischen $\tilde{A}$ und $\sigma^{\tilde{m}d}\tilde{B}$. Diese Verschiebung bedeutet für die gemeinsame Bausteinreihe:

$$\bar{R} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i = R + \tilde{m}d$$

Weiterhin ist für alle $y \in \{c_1, \ldots, c_2+1\}$ die Äquivalenz zwischen den Blöcken A_y und B_y vorausgesetzt worden. Insbesondere sind dann die Blöcke A_{c_2+1} und B_{c_2+1} äquivalent und es gibt darum $\beta_1, \ldots, \beta_n, m \in \mathbb{Z}$ so, daß für die gemeinsame Bausteinreihe gilt:

$$\bar{R} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i l_i = R + md$$

Subtrahiert man die letzten beiden Beziehungen, so erhält man:

$$(\tilde{m} - m)d = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) l_i$$

Mit Hilfe dieser Korrektur kann man auch für die Blöcke A_{c_2+1} und B_{c_2+1} eine Auffüllung bei Verschiebung um $\tilde{m}d$ finden (eventuell müssen dabei gewisse Nebenbedingungen beachtet werden, siehe dazu auch Bemerkung 3.1).

$\square$

An dieser Stelle sind die wichtigsten Vorarbeiten für den Zerlegungssatz geleistet. Aus dem bisher Gesagten leiten sich auch einige Forderungen ab, die im weiteren an die Blockgröße k gestellt werden sollen. Zum einen ist die Unterscheidung der drei Blocktypen nur möglich, wenn jeder Block aus mindestens zwei Bausteinreihen besteht. Das heißt nichts anderes, als daß gilt

$$2k + 1 \geq h + 1 \qquad \text{bzw.} \qquad 2k \geq h$$

Gemeinsame Voraussetzung der Sätze 3.6 und 3.7 ist eine gemeinsame Bausteinreihe für (im (d, d')-Gitter) vertikal benachbarte Blöcke. Das bedeutet, es muß

$$a + k \geq a + d' - k \qquad \text{bzw.} \qquad 2k \geq d'$$

gelten, um die Sätze anwenden zu können.

Seien nun die Gitterweite d und die Gitterhöhe d' vorgegegeben und sei die Blockgröße k den obigen Forderungen entsprechend gewählt. Aus Satz 3.5 d) leitet sich ab, daß jeder Gitterzeile einer zweidimensionalen Stäbchenparkettierung eine bestimmte Äquivalenzklasse zugeordnet werden kann.

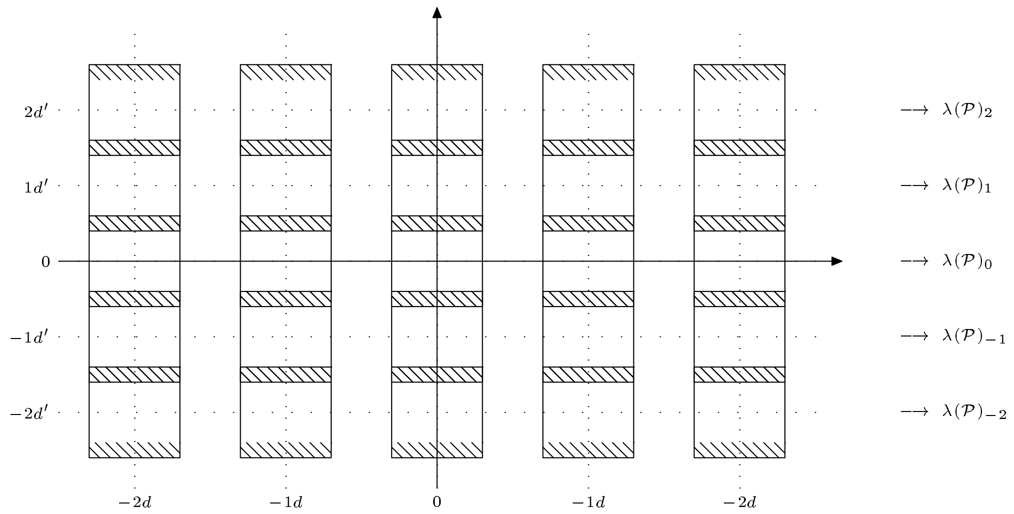


Abbildung 12:

Damit existiert zu jeder zweidimensionalen Stäbchenparkettierung $\mathcal{P}$ eine zweiseitig unendliche Folge von Äquivalenzklassen (siehe Abbildung 12[14]). Diese soll mit $\lambda(\mathcal{P})$ bezeichnet werden. Jedem Parkettsystem Ω^* soll dann die Menge $\Lambda(\Omega^*) := \{\lambda(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \Omega^*\}$ aller zu Parkettierungen aus Ω^* gehörigen Äquivalenzklassenfolgen zugeordnet werden[15]. Natürlich muß nicht jede denkbare Folge von Äquivalenzklassen auch in $\Lambda(\Omega^*)$ auftreten. Jedes $\lambda \in \Lambda(\Omega^*)$ definiert eine Menge

$$\Omega_\lambda := \{\mathcal{P} \in \Omega^* \mid \lambda(\mathcal{P}) = \lambda\} \subseteq \Omega^*$$

Satz 3.8 (1. Zerlegungssatz): *Gegeben seien die Gitterparameter d und d' sowie ein Parkettsystem $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \mathcal{G}_0)$ mit dem Protobausteinsatz $\mathcal{G}_0$ aus Stäbchenbausteinen mit der gemeinsamen Bausteinhöhe h. Die Blockgröße $k = k(h, d')$ sei den vorangegangenen Überlegungen entsprechend gewählt.*

a) *Die Familie $(\Omega_\lambda)_{\lambda \in \Lambda(\Omega^*)}$ bildet eine Partition des Parkettsystems Ω^*.*

b) *Für jedes $\lambda \in \Lambda(\Omega^*)$ ist die Menge Ω_λ transitiv bezüglich der Shifts $(\sigma^{md})_{m \in \mathbb{Z}}$.*

c) *Ist die zugrundegelegte Gitterweite d eine Linearkombination (mit nichtnegativen Koeffizienten) der Stäbchenlängen $l_1, \dots, l_n$, so sind die Ω_λ sogar mischend.*

[14]In der Abbildung bezeichnet $\lambda(\mathcal{P})_i$ das i-te Element der Äquivalenzklassenfolge $\lambda(\mathcal{P})$.

[15]Sofern Klarheit über die dabei benutzten Parameter k, d, d' besteht ist keine Indizierung der Symbole λ beziehungsweise Λ mit diesen Parametern nötig.

Beweis. **a)** Wegen der Definition der Menge $\Lambda(\Omega^*)$ gibt es für alle $\mathcal{P} \in \Omega^*$ ein $\lambda(\mathcal{P}) \in \Lambda(\Omega^*)$. Aus der Definition der Mengen Ω_λ folgt, daß für jedes $\mathcal{P} \in \Omega^*$ insbesondere $\mathcal{P} \in \Omega_{\lambda(\mathcal{P})}$ gilt. Aus der Eindeutigkeit der Zuordnung $\mathcal{P} \mapsto \lambda(\mathcal{P})$ folgt schließlich, daß jede Parkettierung $\mathcal{P}$ in nur einer Menge $\Omega_\lambda(\mathcal{P})$ liegt. Das heißt *jedes* $\mathcal{P}$ liegt in *genau einer* Menge Ω_λ.

b) Transitivität der Menge Ω_λ liegt vor, wenn für zwei beliebige Blöcke $A \subset \mathcal{P}_A \in \Omega_\lambda$ und $B \subset \mathcal{P}_B \in \Omega_\lambda$ gilt:

$$\exists \mathcal{P} \in \Omega_\lambda \mid A \cup \sigma^{md} B \subset \mathcal{P}$$

Im vorausgesetzten (d, d')-Gitter gibt es nun Blöcke $\tilde{A} \subset \mathcal{P}_A$ und $\tilde{B} \subset \mathcal{P}_B$, welche die gegebenen Blöcke A und B enthalten und die Voraussetzungen von Satz 3.7 erfüllen: die Blöcke $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ können stets so gewählt werden, daß sie denselben Zeilenbereich überstreichen und wegen der vorausgesetzten Struktur von Ω_λ stimmen die Äquivalenzklassen (der enthaltenen k-Blöcke) zeilenweise überein. Der Satz 3.7 ist anwendbar: es gibt also eine Verschiebung σ^{md} und eine Auffüllung zwischen $\tilde{A}$ und $\sigma^{md}\tilde{B}$. Wegen $A \subseteq \tilde{A}$ und $B \subseteq \tilde{B}$ gibt es dann auch eine Auffüllung zwischen den Blöcken A und $\sigma^{md}B$. Der so konstruierte Block C mit

$$A \cup \sigma^{md} B \subseteq \tilde{A} \cup \sigma^{md} \tilde{B} \subseteq C$$

muß nun noch zu einer Parkettierung aus Ω_λ fortgesetzt werden.

Dabei müssen zwei Fälle unterschieden werden. Erstens: die Äquivalenzklassenfolge λ enthält (mindestens) eine Typ-$\mathfrak{C}$-Äquivalenzklasse. In diesem Fall bestehen die Parkettierungen in Ω_λ aus übereinandergelegten Bausteinschichten ohne Verzahnung. Da die Blöcke einer bestimmten Gitterzeile in allen Parkettierungen aus Ω_λ dieselbe Äquivalenzklasse aufweisen, besitzen diese Bausteinzeilen in allen Ω_λ-Parkettierungen dieselbe vertikale Ausrichtung. In Abbildung 13 ist dargestellt[16], wie der Block C zu einer Parkettierung fortgesetzt wird. Links beziehungsweise rechts von C werden die Teilüberdeckungen $A_{\text{links}} \subset \mathcal{P}_A$ und $B_{\text{rechts}} \subset \mathcal{P}_B$ angefügt. Wegen der unverzahnten Bausteinschichten erhält man einen horizontalen Streifen ohne Auszahnungen. An diesen kann nun oberhalb die Teilüberdeckung[17] $A_{\text{oben}} \subset \mathcal{P}_A$ oder $B_{\text{oben}} \subset \mathcal{P}_B$ angefügt werden. Genauso kann man unterhalb die Teilüberdeckung $A_{\text{unten}} \subset \mathcal{P}_A$ oder $B_{\text{unten}} \subset \mathcal{P}_B$ ansetzen. Es ist klar, daß die so konstruierte Parkettierung dieselbe Äquivalenzklassenfolge λ besitzt wie $\mathcal{P}_A$ und $\mathcal{P}_B$ und darum ein Element von Ω_λ ist. Einfacher ist der zweite Fall. Sind in der Äquivalenzklassenfolge λ keine Typ-$\mathfrak{C}$-Äquivalenzklassen vorhanden, so gehören laut Bemerkung 3.8 alle Blöcke auf dem (d, d')-Gitter derselben Äquivalenzklasse an. Der Block C wird nun einfach mittels der Methode aus Satz 2.1 zu einer Parkettierung $\mathcal{P}$ fortgesetzt. Man beachte, daß bei diesem Fortsetzungsprozeß weder über noch unter dem Block C horizontale Verschiebungen erzeugt werden. In der konstruierten Parkettierung $\mathcal{P}$ treten also keine Typ-$\mathfrak{C}$-Blöcke auf, das heißt, alle Blöcke des (d, d')-Gitters gehören (wegen Bemerkung 3.8) zur selben Typ-$\mathcal{AB}$-Äquivalenzklasse. Insbesondere handelt es sich dabei um dieselbe Äquivalenzklasse, die in $\tilde{A}$ beziehungsweise $\tilde{B}$ vorzufinden ist. Die konstruierte Parkettierung $\mathcal{P}$ liegt also ebenfalls in Ω_λ.

[16] Aus Platzgründen sind in Abbildung 13 nur die Bezeichnungen der verschiedenen Teilstücke eingetragen. Eventuell notwendige Verschiebungen sind *nicht* explizit aufgeführt.

[17] Man beachte dabei, daß (aufgrund der Parkettstruktur aus unverzahnten Bausteinzeilen) auch die Ränder von A_{oben}, A_{unten}, B_{oben} und B_{unten} keine Auszahnungen aufweisen.

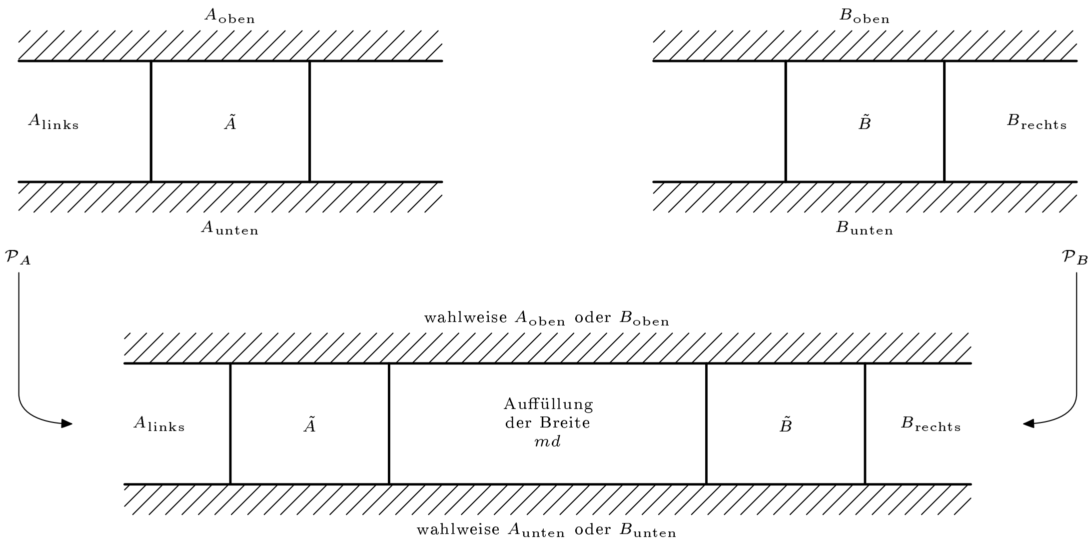


Abbildung 13:

Damit ist die Transitivität von Ω_λ gezeigt.

c) Der Beweis soll per Induktion geführt werden:

Induktionsanfang Wegen b) folgt Transitivität für die Ω_λ. Das heißt, daß es mit den Bezeichnungen des Beweises zu b) eine Auffüllung zwischen A und $\sigma^{m_0 d}B$ gibt ($m_0 \in \mathbb{N}$).

Induktionsvoraussetzung Es existiere eine Auffüllung zwischen den Blöcken A und $\sigma^{md}B$.

Induktionsschritt Der Block $\sigma^{md}B$ werde um die Distanz d weiter nach rechts verschoben. Zwischen A und $\sigma^{(m+1)d}B$ entsteht dabei zusätzlicher Zwischenraum der Breite d. Befanden sich zwischen A und $\sigma^{md}B$ vertikale Verschiebungen, so ist der Zwischenraum an diesen Verschiebungen einzufügen. Andernfalls besteht C aus übereinanderliegenden Bausteinschichten (siehe Satz 3.5) und der Zwischenraum kann an beliebigen Stellen *zwischen* A und $\sigma^{(m+1)d}B$ eingefügt werden. Wegen der Voraussetzung $d = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i$ (mit $\alpha_i > 0$) kann der entstandene Zwischenraum mit Bausteinen aufgefüllt werden, das heißt, es gibt tatsächlich eine Auffüllung zwischen A und $\sigma^{(m+1)d}B$.

Aus Induktionsanfang und Induktionsschritt folgt, daß für beliebige $m \geq m_0$ stets Auffüllungen zwischen A und $\sigma^{md}B$ existieren. Wie unter b) können die entstandenen Quaderblöcke zu Parkettierungen fortgesetzt werden. Durch Vertauschen von A und B erhält man ein analoges Resultat für B und $\sigma^{md}A$ bzw. $\sigma^{-md}\sigma^{md}A = A$ und $\sigma^{-md}B$ (wegen der Shift-Invarianz von Ω^*).

□

Nun sollen zweidimensionale Stäbchensysteme mit vertikaler Dynamik untersucht werden (man betrachtet also die Shifts $\sigma^a := \sigma^{(0,a)}$). Unter dem Gesichtspunkt der vertikalen Dynamik wird ein Block A durch folgende Parameter charakterisiert: durch die Menge

$V(A) := \{V(A)_1, \ldots, V(A)_{M(A)}\}$ der in A enthaltenen vertikalen Verschiebungen ($M(A)$ Stück), durch die unteren Koordinaten $U(A)_1, \ldots, U(A)_{M(A)+1}$ und die oberen Koordinaten $O(A)_1, \ldots, O(A)_{M(A)+1}$ derjenigen vertikalen Streifen von A, die durch $V(A)$ definiert werden (siehe auch Abbildung 14).

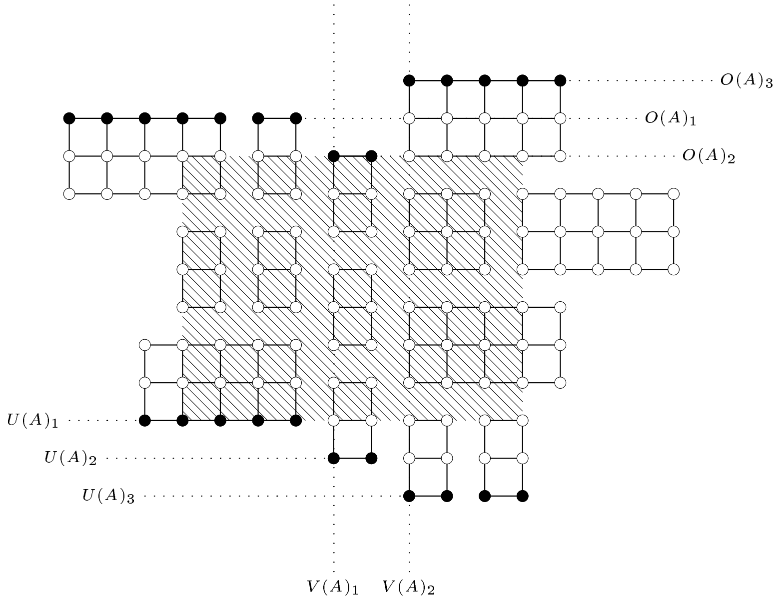


Abbildung 14:

Wie im Fall der horizontalen Dynamik sollen zwei Blöcke A und B vertikal äquivalent heißen, wenn zwischen A und $\sigma^{md'}B$ eine Auffüllung möglich ist. Mit den Bezeichnungen der vorangegangenen Definition formuliert man dann

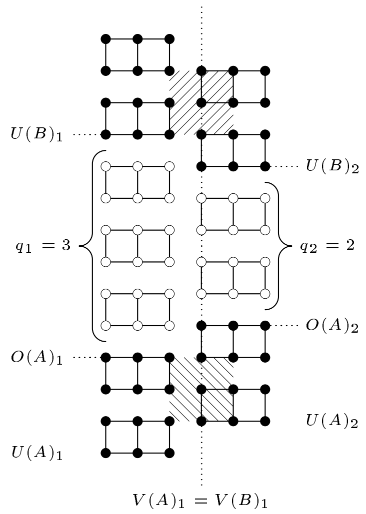
Satz 3.9: *Zwei Blöcke A und B sind genau dann vertikal äquivalent, wenn sie identische vertikale Verschiebungen besitzen (das heißt $V(A) = V(B)$) und für korrespondierende vertikale Streifen gilt:* $\mathrm{ggT}(h, d') \mid U(B)_i - U(A)_i$.

Beweis. Eine Auffüllung zwischen A und $\sigma^{md'}B$ existiert genau dann, wenn für alle i die (vertikalen) Streifen zwischen $U(B)_i$ und $O(A)_i$ aufgefüllt werden können.

Da innerhalb dieser Streifen keine weiteren (vertikalen) Verschiebungen liegen, muß die Auffüllung mit einer entsprechenden Anzahl q_i (horizontaler) Bausteinstreifen der Höhe h geschehen (geeignete Bausteinstreifen finden sich beispielsweise am unteren Rand von B oder am oberen Rand von A). Die Auffüllung zwischen $U(B)_i$ und $O(A)_i$ existiert genau dann, wenn es für alle i eine Lösung von

$$\begin{aligned} O(A)_i + q_i h &= U(A)_i + \alpha_i h + q_i h \\ &= U(A)_i + \bar{q}_i h \\ &= U(B)_i + md' \end{aligned}$$

gibt. Das wiederum ist genau dann der Fall, wenn gilt: $\mathrm{ggT}(h, d') \mid U(B)_i - U(A)_i$. Die Notwendigkeit der übereinstimmenden vertikalen Verschiebungen, insbesondere für die obige Argumentation, ist klar.



□

Bemerkung 3.9: **a)** Wegen der gemeinsamen Höhe aller Protobausteine eines Stäbchensystems ist es in Satz 3.9 nicht möglich und auch nicht nötig, einen den Bezugskanten entsprechenden Begriff zu entwickeln.

b) Für Typ-$\mathcal{A}$-Blöcke hat man $V(A) \neq \emptyset$. Für Typ-$\mathcal{B}$- und Typ-$\mathcal{C}$-Blöcke gilt $V(A) = \emptyset$. Man erhält damit dasselbe Resultat, welches sich schon in Satz 3.5 a) andeutet, nämlich, daß Typ-$\mathcal{A}$-Blöcke nur zu weiteren Typ-$\mathcal{A}$-Blöcken vertikal äquivalent sein können.

c) Aus dem Zusammenhang zwischen Äquivalenz und Auffüllbarkeit ergibt sich folgende Ergänzung zu Satz 3.5 (Struktursatz) Punkt d): je zwei in einer Parkettierung in derselben Gitterspalte befindliche k-Blöcke gehören derselben vertikalen Äquivalenzklasse an.

d) Weil für Typ-$\mathcal{BC}$-Blöcke $V(A) = \emptyset$ gilt folgt insbesondere, daß im (d, d')-Gitter horizontal benachbarte Typ-$\mathcal{BC}$-Blöcke mit überlappenden Basen derselben vertikalen Äquivalenzklasse angehören. Befinden sich in einer derartigen Parkettierung *keine* Typ-$\mathcal{A}$-Blöcke, so gehören die Blöcke an den (d, d')-Gitterpunkten alle *derselben* vertikalen Äquivalenzklasse an.

Satz 3.10: *Gegeben seien die Blöcke*

$$\begin{array}{lll} & A & \textit{mit der Basis} \quad \langle (c_1 d - k, a_1 d' - k), (c_2 d + k, a_2 d' + k) \rangle \\ \textit{und} & B & \textit{mit der Basis} \quad \langle (c_1 d - k, b_1 d' - k), (c_2 d + k, b_2 d' + k) \rangle \end{array}$$

Sind für $j \in \{c_1, \ldots, c_2\}$ die an den Punkten $(jd, a_2 d')$ und $(jd, b_1 d')$ befindlichen k-Blöcke vertikal äquivalent und besitzen (im (d, d')-Gitter) horizontal benachbarte k-Blöcke mindestens eine gemeinsame Bausteinreihe, dann gibt es eine Verschiebung md' $(m \in \mathbb{N})$ so, daß eine Auffüllung zwischen A und $\sigma^{md'} B$ existiert.

Beweis. $A_j \subseteq A$ beziehungsweise $B_j \subseteq B$ bezeichne den k-Block an der Position $(jd, a_2 d')$ beziehungsweise $(jd, b_1 d')$ in B. Wegen der im Satz geforderten Äquivalenz gilt dann $O(A_j)_i + q_i^{(j)} = U(B_j) + m_j d'$ (für $i \in \{1, \ldots, M_j + 1\}$, $M_j = M(A_j) = M(B_j)$

und $j \in \{c_1, \ldots, c_2\}$). Die vorausgesetzte gemeinsame Bausteinreihe benachbarter Blöcke bedeutet nun, daß für $c_1 \leq s < c_2$ und $t := s+1$ gilt:

$$O := O(A_s)_{M(A_s)+1} = O(A_t)_1 \qquad U := U(B_s)_{M(B_s)+1} = U(B_t)_1$$

Es gibt dann zwei Verschiebungen $m_s d'$ und $m_t d'$ sowie Auffüllungen aus α_s beziehungsweise α_t Bausteinen. Man hat dann $O + \alpha_s h = U + m_s d'$ und $O + \alpha_t h = U + m_t d'$, das heißt $(\alpha_s - \alpha_t)h = (m_s - m_t)d'$. Diese Beziehung setzt man nun in die Äquivalenzgleichungen für A_t und B_t ein. Für $i \in \{1, \ldots, M(A_t)+1\}$ erhält man

$$O(A_t)_i + (q_i + \alpha - \beta)h = U(B_t)_i + (m_t + m_s - m_t)d' = U(B_t)_i + m_s d'$$

Es existiert also auch für die Verschiebung $m_s d'$ eine Auffüllung zwischen A_t und B_t. Durch sukzessive Anwendung des gezeigten Verfahrens erhält man schließlich für alle $j \in \{c_1, \ldots, c_2\}$ eine Auffüllung zwischen A_j und B_j bei Verschiebung von B_j um $m_{c_1} d'$. Man hat damit also eine Auffüllung zwischen A und $\sigma^{m_{c_1} d'} B$ (analog dem horizontalen Fall müssen dabei eventuell noch gewisse Nebenbedingungen berücksichtigt werden). □

Aus Bemerkung 3.9 c) folgt, daß in einer Parkettierung für jede Gitter*spalte* genau eine vertikale Äquivalenzklasse existiert. In Analogie zum horizontalen Fall ordnet man nun jeder Parkettierung $\mathcal{P}$ eine (zweiseitig unendliche) Folge vertikaler Äquivalenzklassen $\vartheta(P)$ zu. Dem System Ω^* wird die Menge $\Theta(\Omega^*) := \{\vartheta(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \Omega^*\}$ aller im System auftretenden Folgen vertikaler Äquivalenzklassen zugeordnet. Jedes $\vartheta \in \Theta(\Omega^*)$ definiert eine Menge

$$\Omega_\vartheta := \{\mathcal{P} \in \Omega^* \mid \vartheta(\mathcal{P}) = \vartheta\} \subseteq \Omega^*$$

Satz 3.11 (2. Zerlegungssatz): a) *Die Familie $(\Omega_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta(\Omega^*)}$ bildet eine Partition des Parkettsystems Ω^*.*

b) *Für jedes $\vartheta \in \Theta(\Omega^*)$ ist die Menge Ω_ϑ transitiv bezüglich der Shifts $(\sigma^{md'})_{m \in \mathbb{Z}}$.*

c) *Ist die zugrundegelegte Gitterweite d' ein Vielfaches der Stäbchenhöhe h, so sind die Ω_ϑ sogar mischend.*

Beweis. **a)** Die Partitionseigenschaft folgt aus der Definition der Ω_ϑ und der Eindeutigkeit der Äquivalenzklassenfolge $\vartheta(\mathcal{P})$.

b) Beim Beweis der Transitivität geht man wie im horizontalen Fall vor. Man formt die Transitivitätsbeziehung in die Blockschreibweise um und zeigt dann, daß für alle Blöcke A, B eine Parkettierung $\mathcal{P} \in \Omega_\vartheta$ existiert mit $A \cup \sigma^{md'} B \subset \mathcal{P}$. Dazu werden A und B in entsprechende Gitterblöcke eingebettet, auf die dann Satz 3.10 angewendet wird. Man erhält eine Auffüllung X und es gilt:

$$A \cup \sigma^{md} B \subseteq \tilde{A} \cup \sigma^{md'} \tilde{B} \subseteq \tilde{A} \cup X \cup \sigma^{md'} \tilde{B} = C$$

Der Block C soll nun zu einer Parkettierung aus Ω_ϑ fortgesetzt werden. Wie im horizontalen Fall sollen dabei zwei Fälle unterschieden werden. Im ersten Fall enthalte die

Äquivalenzklassenfolge ϑ Typ-$\mathcal{A}$-Blöcke. Die Parkettierungen aus Ω_ϑ enthalten darum mindestens eine vertikale Verschiebung. Die Koordinaten der vertikalen Verschiebungen sind eindeutig durch die Folge ϑ bestimmt. Die entsprechende Situation ist in Abbildung 15 skizziert[18]. Die vertikalen Verschiebungen sind dabei durch vertikale, gepunktete Linien angedeutet. C_L, C_M und C_R sind verschiedene Vertikalkomponenten[19], welche durch vertikale Verschiebungen getrennt sind. Eine Auffüllung des linken Bereiches $(X_L \cup X) \cap C_L$ ist zum Beispiel mit Kopien des oberen Randes von $(\tilde{A}_L \cup \tilde{A}) \cap C_L$ beziehungweise Kopien des unteren Randes von $(\tilde{B}_L \cup \tilde{B}) \cap C_L$ möglich. Genauso füllt man den rechten Streifen $(X_R \cup X) \cap C_R$ mit Kopien des oberen Randes von $(\tilde{A}_R \cup \tilde{A}) \cap C_R$ oder Kopien des unteren Randes von $(\tilde{B}_R \cup \tilde{B}) \cap C_R$. Die Fortsetzung der Vertikalkomponenten nach oben beziehungsweise unten ist problemlos möglich durch Anfügen der über $\tilde{B}_L \cup \tilde{B} \cup \tilde{B}_R$ sowie unter $\tilde{A}_L \cup \tilde{A} \cup \tilde{A}_R$ liegenden Teile von $\mathcal{P}_B$ beziehungsweise $\mathcal{P}_A$. Für den (in der Abbildung 15 skizzierten) Fall, daß C_L oder C_R endliche Breite haben, ergänzt man links von C_L beziehungsweise rechts von C_R mit den entsprechenden Teilen aus $\mathcal{P}_A$ oder $\mathcal{P}_B$ (vergleiche auch mit dem Vorgehen im horizontalen Fall).

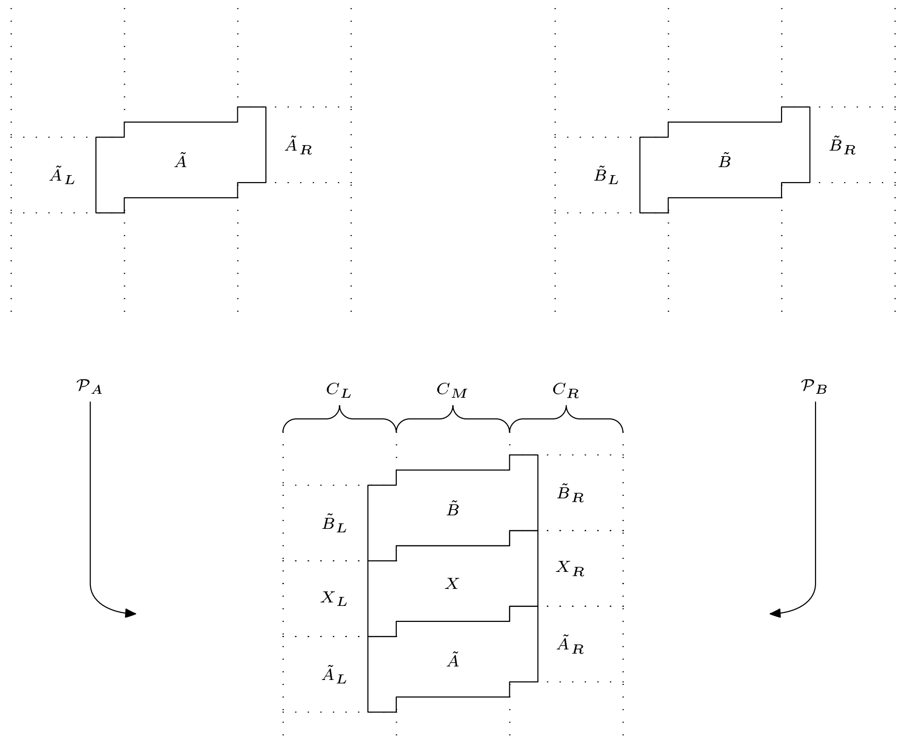


Abbildung 15:

c) Der Beweis wird wie im horizontalen Fall per Induktion geführt. Den Induktionsanfang liefert dabei die Transitivität. Wegen der Voraussetzung $d' = qh$ können die Blöcke im Induktionsschritt um den Betrag d' auseinandergerückt werden, wobei man in den

[18] Wie im horizontalen Fall (vergleiche Abbildung 13) sind in Abbildung 15 aus Platzgründen nur die Bezeichnungen der verschiedenen Teilstücke eingetragen. Eventuell notwendige Verschiebungen sind *nicht* explizit aufgeführt.

[19] Man beachte vor allem, daß die Anzahl, Position und horizontale Ausdehnung dieser Vertikalkomponenten variieren kann. Allerdings greift die anschließende Argumentation auch im Falle unendlich breiter Vertikalkomponenten oder falls $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ selbst keine vertikale Verschiebung enthalten.

entstehenden Freiraum q Bausteinreihen einfügt (zum Beispiel durch Kopieren einer zwischen den Blöcken gelegenen Bausteinreihe).

Einfacher ist der zweite Fall. Sind in der Äquivalenzklassenfolge ϑ keine Typ-$\mathcal{A}$-Äquivalenzklassen vorhanden, so gehören laut Bemerkung 3.9 d) alle Blöcke auf dem (d,d')-Gitter derselben Äquivalenzklasse an. Der Block C wird nun einfach mittels der Methode aus Satz 2.1 zu einer Parkettierung $\mathcal{P}$ fortgesetzt. Man beachte, daß bei diesem Fortsetzungsprozeß weder rechts noch links vom Block C vertikale Verschiebungen erzeugt werden. In der konstruierten Parkettierung $\mathcal{P}$ treten also keine Typ-$\mathcal{A}$-Blöcke auf, das heißt, alle Blöcke des (d,d')-Gitters gehören (wegen Bemerkung 3.9 d)) zur selben Typ-$\mathcal{AB}$-Äquivalenzklasse. Insbesondere handelt es sich dabei um dieselbe Äquivalenzklasse, die in $\tilde{A}$ beziehungsweise $\tilde{B}$ vorzufinden ist. Die konstruierte Parkettierung $\mathcal{P}$ liegt also ebenfalls in Ω_ϑ.

$\square$

3.3. Zusammenfassende Darstellung von Eigenschaften von Stäbchensystemen bei horizontaler und vertikaler Dynamik

Für die weiteren Betrachtungen sei $k > \frac{1}{2}d$ und $k > \frac{1}{2}d'$ vorausgesetzt. Dann besitzen im (d,d')-Gitter horizontal beziehungsweise vertikal benachbarte k-Blöcke jeweils eine gemeinsame Bausteinreihe. Außerdem überdecken die k-Blöcke an den (d,d')-Gitterpunkten so alle strukturbestimmenden Verschiebungen in den Parkettierungen. Man definiert dann die folgenden Symbole:

$$\begin{aligned}
&\Omega_A := \{\mathcal{P} \in \Omega^* \mid \exists \text{ Typ-}\mathcal{A}\text{-Block in } \mathcal{P}\}\\
&\Omega_C := \{\mathcal{P} \in \Omega^* \mid \exists \text{ Typ-}\mathcal{C}\text{-Block in } \mathcal{P}\}\\
&\Omega_B := \Omega^* \setminus (\Omega_A \cup \Omega_C) = \{\mathcal{P} \in \Omega^* \mid \mathcal{P} \text{ enthält nur Typ-}\mathcal{B}\text{-Blöcke}\}\\
&\Lambda_C(\Omega^*) := \{\lambda \in \Lambda(\Omega^*) \mid \exists \text{ Typ-}\mathcal{C}\text{-Äquivalenzklasse in } \lambda\}\\
&\Theta_A(\Omega^*) := \{\vartheta \in \Theta(\Omega^*) \mid \exists \text{ Typ-}\mathcal{A}\text{-Äquivalenzklasse in } \vartheta\}
\end{aligned}$$

Satz 3.12: *Es gilt* **a)** $\Omega_C = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_C(\Omega^*)} \Omega_\lambda$ **b)** $\Omega_A = \bigcup_{\vartheta \in \Theta_A(\Omega^*)} \Omega_\vartheta$

c) $\Omega_A \cup \Omega_B = \bigcup_{\lambda \notin \Lambda_C(\Omega^*)} \Omega_\lambda$ **d)** $\Omega_B \cup \Omega_C = \bigcup_{\vartheta \notin \Theta_A(\Omega^*)} \Omega_\vartheta$

Weitere Aussagen über die möglichen Äquivalenzklassenfolgen leiten sich aus Satz 3.5 (Struktursatz) und den Bemerkungen 3.8 und 3.9 ab. Eine Parkettierung $\mathcal{P} \in \Omega_A \cup \Omega_B$ (das heißt ohne Typ-$\mathcal{C}$-Blöcke) besitzt in jeder Gitterzeile die gleiche (horizontale) Typ-$\mathcal{AB}$-Äquivalenzklasse. Die zugehörige Äquivalenzklassenfolge $\lambda(\mathcal{P})$ ist also konstant und wegen der Endlichkeit von $\mathcal{B}_0$ gilt $\operatorname{card}(\Lambda(\Omega^*) \setminus \Lambda_C(\Omega^*)) < \infty$. Das heißt, $\Omega_A \cup \Omega_B$ zerfällt in höchstens endlich viele Komponenten. Ähnlich sind die Verhältnisse bei vertikaler Dynamik: eine Parkettierung $\mathcal{P}$ ohne Typ-$\mathcal{A}$-Blöcke besitzt in allen Gitterspalten die gleiche (vertikale) Typ-$\mathcal{BC}$-Äquivalenzklasse und die Äquivalenzklassenfolge $\vartheta(\mathcal{P})$ ist konstant. Darum gilt $\operatorname{card}(\Lambda(\Omega^*) \setminus \Theta_A(\Omega^*)) < \infty$ und $\Omega_B \cup \Omega_C$ zerfällt bei vertikaler

Dynamik in höchstens endlich viele Teilsysteme. Damit ergeben sich die in Abbildung 16 links für horizontale und rechts für vertikale Dynamik skizzierten Zerlegungen eines Stäbchensystems. Um die offensichtlich zwischen den Abbildungen bestehende Symme-

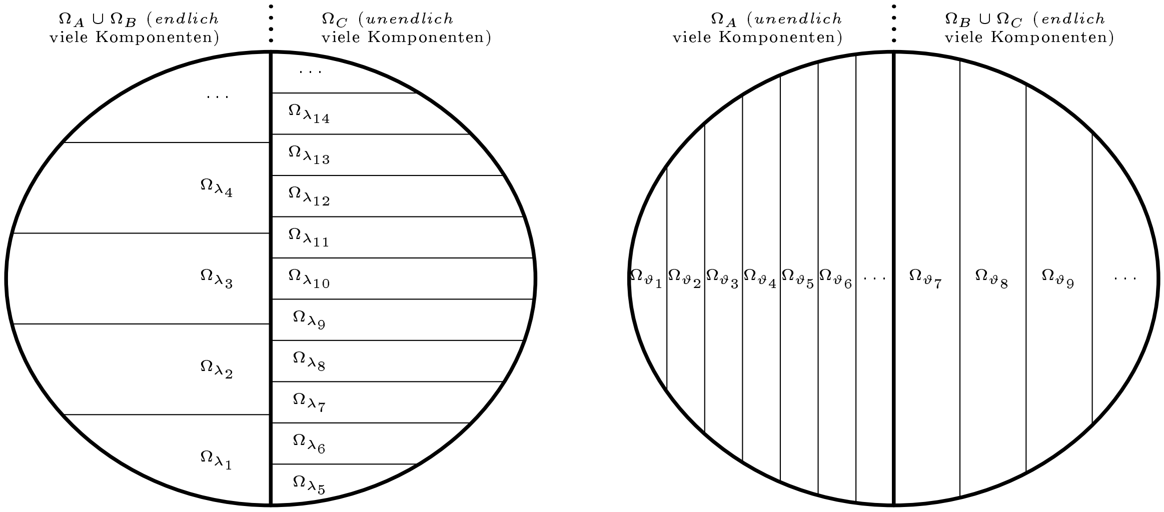


Abbildung 16:

trie näher zu beschreiben, soll im weiteren untersucht werden, ob und wie sich die Blockäquivalenz in der einen Dynamikrichtung mit den Begriffen der jeweils andere Richtung ausdrücken läßt.

Seien die Typ-$\mathcal{A}$-Blöcke A und B mit den Verschiebungsmengen $V(A)$ und $V(B)$ gegeben. Die Elemente $u \in V(A)$ beziehungsweise $v \in V(B)$ sind Bezugskanten von A beziehungweise B. Die beiden Typ-$\mathcal{A}$-Blöcke A und B sind nun genau dann horizontal äquivalent, wenn gilt

$$\exists u \in V(A), \exists v \in V(B) \quad \text{mit} \quad \mathrm{ggT}(l_1, \ldots, l_n, d) \mid u - v$$

(siehe Bemerkung zu Satz 3.3). Diese Beziehung gilt natürlich stets wenn $V(A) \cap V(B) \neq \emptyset$. Sind A und B *vertikal* äquivalent, so hat man $V(A) = V(B)$ und die Blöcke sind auch *horizontal* äquivalent. Da jeder Typ-$\mathcal{A}$-Block sowohl in einer horizontalen Typ-$\mathcal{A}$-Äquivalenzklasse als auch in einer vertikalen Typ-$\mathcal{A}$-Äquivalenzklasse liegt und da (mit dem eben gezeigten) jede vertikale Typ-$\mathcal{A}$-Äquivalenzklasse vollständig innerhalb einer horizontalen Typ-$\mathcal{A}$-Äquivalenzklasse liegt, folgt, daß die vertikalen Typ-$\mathcal{A}$-Äquivalenzklassen eine Verfeinerung der horizontalen Typ-$\mathcal{A}$-Äquivalenzklassen bilden.

Seien A und B nun Typ-$\mathfrak{C}$-Blöcke. Dann gilt $V(A) = V(B) = \emptyset$ und die Blöcke A und B bestehen jeweils aus nur einer Vertikalkomponente, deren untere Randkoordinate mit $U(A)$ beziehungweise $U(B)$ gegeben sei. A und B sind nun genau dann vertikal äquivalent, wenn $\mathrm{ggT}(h, d') \mid U(B) - U(A)$. Entsprechend Satz 3.4 gilt für horizontal äquivalente Typ-$\mathfrak{C}$-Blöcke $U(A) = U(B)$, woraus die vertikale Äquivalenz von A und B folgt. Die horizontalen Typ-$\mathfrak{C}$-Äquivalenzklassen bilden demnach eine Verfeinerung der vertikalen Typ-$\mathfrak{C}$-Äquivalenzklassen. Weiterhin fällt bei hinreichender Blockgröße eine Typ-$\mathfrak{B}$-Äquivalenzklasse im horizontalen Fall mit einer Typ-$\mathcal{A}$-Äquivalenzklasse zusammen und im vertikalen Fall mit einer Typ-$\mathcal{C}$-Äquivalenzklasse (Abbildung 17). Man zeigt dies wie folgt: ein Typ-$\mathcal{B}$-Block A kann zu einem Block mit vertikaler Verschiebung erweitert werden. Dessen Fortsetzung entsprechend Satz 2.1 liefert eine Parkettierung, welche in derselben Gitterzeile wie A einen Typ-$\mathcal{A}$-Block enthält. Genauso erweitert man A zu einem Block mit horizontaler Verschiebung, dessen Fortsetzung einen Typ-$\mathcal{C}$-Block in derselben Gitterspalte wie A enthält.

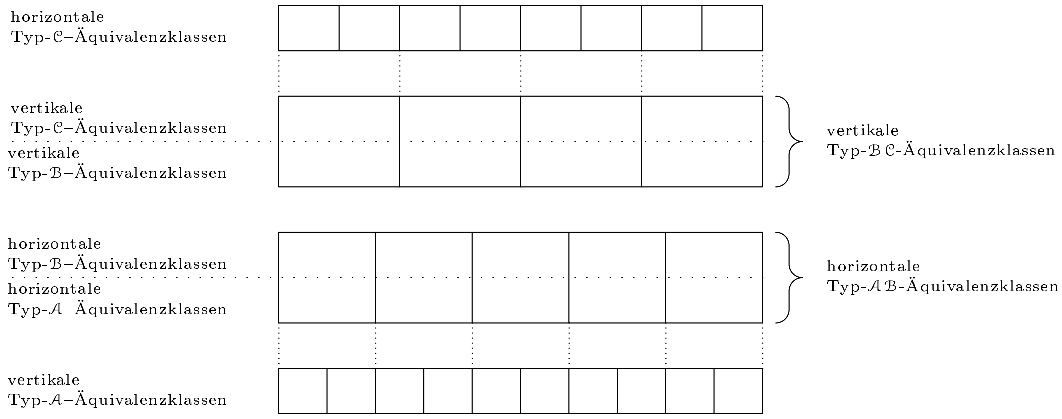


Abbildung 17:

Sei $\mathcal{P}$ eine Parkettierung aus $\Omega_{\vartheta_i} \subseteq \Omega_A$. Dann enthält die zu $\mathcal{P}$ gehörige Äquivalenzklassenfolge $\vartheta(\mathcal{P}) = \vartheta_i = (\dots, \mathfrak{V}_{\iota-1}, \mathfrak{V}_\iota, \mathfrak{V}_{\iota+1}, \dots)$ eine vertikale Typ-$\mathcal{A}$-Äquivalenzklasse. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dies $\mathfrak{V}_\iota$. $\mathfrak{V}_\iota$ ist vollständig in einer horizontalen Typ-$\mathcal{A}$-Äquivalenzklasse $\mathfrak{H}$ enthalten und alle k-Blöcke der Gitterspalte ι gehören der Klasse $\mathfrak{H}$ an. Zu $\mathcal{P}$ gehört also eine (konstante) Folge $\lambda_j = (\dots, \mathfrak{H}, \mathfrak{H}, \mathfrak{H}, \dots)$ von horizontalen Typ-$\mathcal{A}$-Äquivalenzklassen. Es gilt darum $\lambda_j \notin \Lambda_C$ und zusammen mit Satz 3.12 erhält man $\Omega_{\vartheta_i} \subseteq \Omega_{\lambda_j} \subseteq \Omega_A \cup \Omega_B$ und sogar $\Omega_{\vartheta_i} \subseteq \Omega_{\lambda_j} \cap \Omega_A$ (wegen $\Omega_{\vartheta_i} \cap \Omega_A = \Omega_{\vartheta_i}$).

Sei $\mathcal{P}$ eine Parkettierung aus $\Omega_{\lambda_i} \subseteq \Omega_C$. Dann enthält die zu $\mathcal{P}$ gehörige Äquivalenzklassenfolge $\lambda(\mathcal{P}) = \lambda_i = (\dots, \mathfrak{H}_{\iota-1}, \mathfrak{H}_\iota, \mathfrak{H}_{\iota+1}, \dots)$ eine vertikale Typ-$\mathcal{C}$-Äquivalenzklasse. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dies $\mathfrak{H}_\iota$. $\mathfrak{H}_\iota$ ist vollständig in einer vertikalen Typ-$\mathcal{C}$-Äquivalenzklasse $\mathfrak{H}$ enthalten und alle k-Blöcke der Gitterzeile ι gehören der Klasse $\mathfrak{V}$ an. Zu $\mathcal{P}$ gehört also eine (konstante) Folge $\vartheta_j = (\dots, \mathfrak{V}, \mathfrak{V}, \mathfrak{V}, \dots)$ von vertikalen Typ-$\mathcal{C}$-Äquivalenzklassen. Es gilt darum $\vartheta_j \notin \Theta_A$ und zusammen mit Satz 3.12 erhält man $\Omega_{\lambda_i} \subseteq \Omega_{\vartheta_j} \subseteq \Omega_B \cup \Omega_C$ und sogar $\Omega_{\lambda_i} \subseteq \Omega_{\vartheta_j} \cap \Omega_C$ (wegen $\Omega_{\lambda_i} \cap \Omega_C = \Omega_{\lambda_i}$).

Abbildung 18 zeigt das Resultat, wenn die bisherigen Erkenntnisse in ein gemeinsames Diagramm eingetragen werden. Dabei gehören horizontale Linien zur horizontalen Zerlegung und vertikale Linien zur vertikalen Zerlegung. Die Mengen Ω_{λ_i} und Ω_{ϑ_j} sind entsprechend den Bedingungen in den Zerlegungssätzen 3.8 und 3.11 transitiv beziehungsweise mischend. Die Subkomponenten des (in Abbildung 18 schraffierten) Bereichs Ω_B sind allerdings *nicht* notwendigerweise *transitiv.*

Man betrachte dazu für $k = 1$ und das $(1,1)$-Gitter ein Stäbchensystem $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \mathcal{G}_0)$

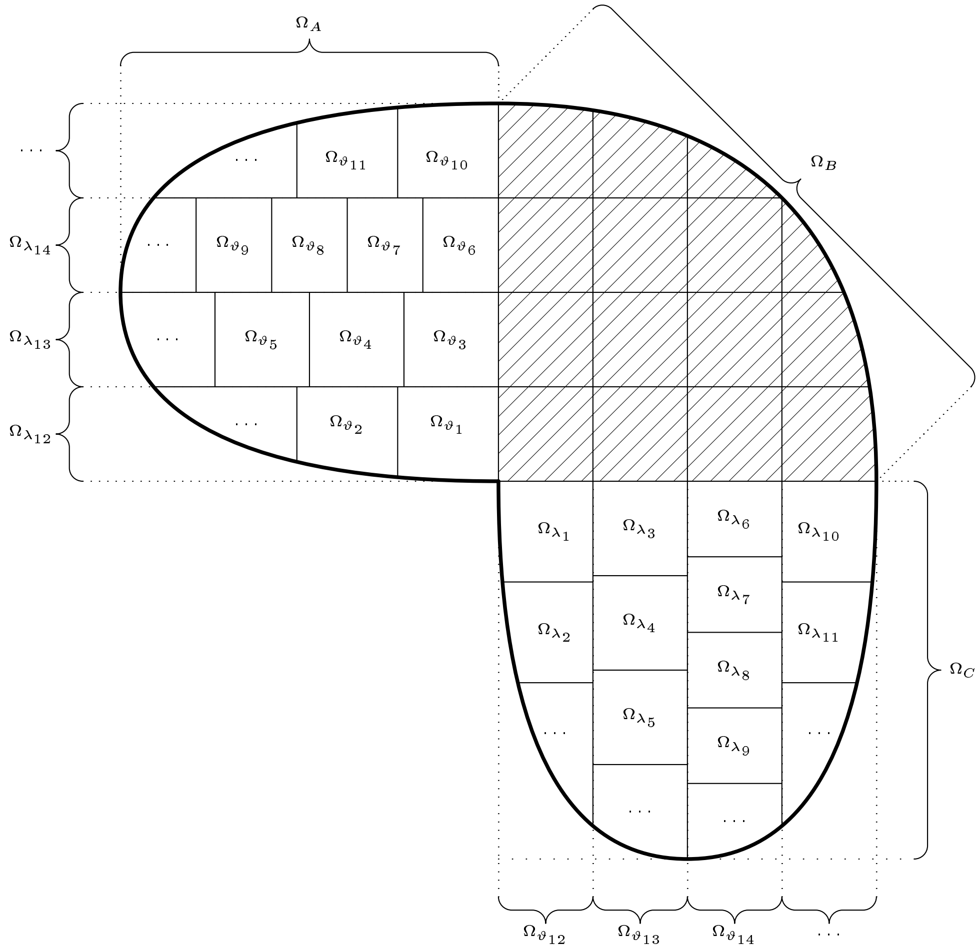
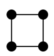
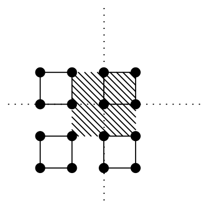
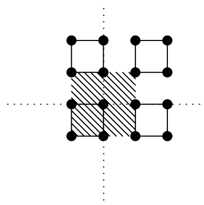


Abbildung 18:

mit $\mathcal{G}_0 = \{G\}$ (wobei $G = \langle(0,0),(1,1)\rangle$). Man betrachtet dann die Blöcke

$$A := \{\sigma^{(-2,-2)}G, \sigma^{(-2,0)}G, \sigma^{(0,-2)}G, \sigma^{(0,0)}G\}$$
$$B := \sigma^{(1,1)}A = \{\sigma^{(-1,-1)}G, \sigma^{(-1,1)}G, \sigma^{(1,-1)}G, \sigma^{(1,1)}G\}$$

Bausteinsatz $\mathcal{G}_0$	Block A	Block B
		

Wegen Satz 2.1 gibt es Parkettierungen $\mathcal{P}_1 \in \Omega^*$ mit $A \cup \sigma^{(3d,0)}B \subset \mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2 \in \Omega^*$ mit $A \cup \sigma^{(0,3d')}B \subset \mathcal{P}_2$. A und B sind also sowohl horizontal als auch vertikal äquivalent. Die Parkettierungen $\mathcal{P}_A := \{\sigma^{(2ad,2bd')}G\}_{a,b\in\mathbb{Z}}$ und $\mathcal{P}_B := \sigma^{(1,1)}P_A$ liegen in einer Subkomponente von Ω_B. Will man die Transitivität von Ω_B zeigen, so müssen die Transitivitätsbedingungen auch für A und B erfüllt sein und man sucht Parkettierungen:

$$\begin{aligned} &\mathcal{Q}_1 \quad \text{mit} \quad A \cup \sigma^{(m_1 d,0)} B \subset \mathcal{Q}_1 \quad \text{und} \quad \mathcal{Q}_1 \in \Omega_\lambda \cap \Omega_\vartheta \\ &\mathcal{Q}_2 \quad \text{mit} \quad A \cup \sigma^{(0,m_2 d')} B \subset \mathcal{Q}_2 \quad \text{und} \quad \mathcal{Q}_2 \in \Omega_\lambda \cap \Omega_\vartheta \end{aligned}$$

Für A und B gilt aber $\bar{Y}(A) \neq Y(B)$, so daß zwischen A und $\sigma^{(m_1 d,0)} B$ stets eine vertikale Verschiebung liegen muß. Die Parkettierung $\mathcal{Q}_1$ enthält also eine Typ-$\mathcal{A}$-Äquivalenzklasse und liegt deshalb nicht in Ω_B. Genauso besitzt $\mathcal{Q}_2$ stets eine horizontale Verschiebung und liegt deshalb auch nicht in Ω_B. Darum ist $\Omega_\lambda \cap \Omega_\vartheta$ weder bezüglich der horizontalen noch bezüglich der vertikalen Dynamik transitiv.

4. Ausblick

Zum Abschluß soll angedeutet werden, in welche Richtungen sich die vorgestellten Überlegungen fortsetzen lassen. Als erfolgversprechend könnten sich die folgenden Punkte erweisen:

- In Abschnitt 3.3 wurde gezeigt, daß Ω_B nichttransitive Mengen enthält. Es ist zu untersuchen, ob *alle* Komponenten in Ω_B nichttransitiv sind oder ob es Kriterien für transitive Komponenten in Ω_B gibt.

- Man betrachte allgemeinere Quadersysteme. Stäbchensysteme sind spezielle vollständige Quadersysteme. Die in Abschnitt 3.3 festgestellte Symmetrie der Zerlegungen läßt erwarten, daß sich die Aussagen des Abschnitts 3 mindestens auch auf vollständige Quadersysteme ausdehnen lassen.

- Man betrachtet zweidimensionale Stäbchensysteme $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \mathcal{G}_0)$ bezüglich der allgemeinen Dynamik $(\sigma^a)_{a \in \mathbb{Z}^2}$. Die Transitivität von $\bar{\Omega} \subseteq \Omega^*$ ist dann durch folgende Beziehung definiert:

  $$\forall\, [A], [B] \subseteq \bar{\Omega} \quad \exists\, m_1, m_2 \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad [A] \cap \sigma^{(m_1 d, m_2 d')}[B] \neq \emptyset$$

  Diese Beziehung ist bereits für jede Menge $\bar{\Omega}$ erfüllt, die bezüglich einer der achsparallelen Shifts $\sigma^{(md,0)}$ oder $\sigma^{(0,md)}$ transitiv ist. Zusätzlich dürften sich die Komponenten von Ω_B als transitiv erweisen. Die Mischungsaussagen lassen sich allerdings nicht so einfach übertragen, man wird also einen geeigneten zweidimensionalen Mischungsbegriff entwickeln müssen.

Symbolverzeichnis

allgemeine Symbole

B	Block	6
k	Blockgröße	6

Ω^*	Parkettsystem	5
σ^a	Shiftabbildung	4
U	offene Menge	8
V	offene Menge	8
$\langle a, b\rangle$	Quader mit den Eckpunkten $a, b \in \mathbb{Z}^2$	4
$[B]$	durch B definierter Zylinder (Menge aller Parkettierungen, die B enthalten	7

Symbole zum Zerlegungssatz

d	Gitterweite	13
d'	Gitterhöhe	17
Δ	Zeilenverschiebungstransformation für Typ-$\mathcal{C}$-Blöcke	22
L	Bezugskante	18
$\lambda(\mathcal{P})$	zu $\mathcal{P}$ gehörige Folge (horizontaler) Äquivalenzklassen (zweidimensionaler Fall)	28
$\Lambda(\Omega^*)$	zu Ω^* gehörige Menge aller (horizontalen) Äquivalenzklassenfolgen (zweidimensionaler Fall)	28
$M(A)$	Anzahl der vertikalen Verschiebungen in A	30
Ω_{ϑ_i}	durch ϑ_i definiertes transitives Teilsystem von Ω^* (eindimensionaler Fall)	16
Ω_λ	von λ definiertes transitives Teilsystem vom Ω^* (zweidimensionaler Fall, horizontale Zerlegung)	28
$O(A)_i$	obere Koordinate der i-ten Vertikalkomponente von A	30
Ω_ϑ	von ϑ definiertes transitives Teilsystem vom Ω^* (zweidimensionaler Fall, vertikale Zerlegung)	33
Ω_A	Menge aller Parkettierungen, die Typ-$\mathcal{A}$-Blöcke enthalten	35
Ω_B	Menge aller Parkettierungen, die *nur* Typ-$\mathcal{B}$-Blöcke enthalten	35
Ω_C	Menge aller Parkettierungen, die Typ-$\mathcal{C}$-Blöcke enthalten	35
$\Lambda_C(\Omega^*)$	Menge aller Folgen horizontaler Äquivalenzklassen mit Typ-$\mathcal{C}$-Blöcken	35
$\Theta_A(\Omega^*)$	Menge aller Folgen vertikaler Äquivalenzklassen mit Typ-$\mathcal{A}$-Blöcken	35
$R(A)$	linker Rand von A (eindimensionaler Fall)	13
$\bar{R}(A)$	rechter Rand von A (eindimensionaler Fall)	13
ϑ_i	Äquivalenzklasse in $\mathcal{B}_k$ (eindimensionaler Fall)	16
Θ	Anzahl der Äquivalenzklassen in $\mathcal{B}_k$ (eindimensionaler Fall)	16
Typ-$\mathcal{A}$	Menge der Blöcke mit vertikaler Verschiebung	18
Typ-$\mathcal{B}$	Menge der Blöcke, deren Ränder „geglättet“ werden können	18
Typ-$\mathcal{C}$	Menge der Blöcke, deren Ränder *nicht* „geglättet“ werden können	18
Typ-$\mathcal{AB}$	Vereinigung der Mengen der Typ-$\mathcal{A}$-und der Typ-$\mathcal{B}$-Blöcke	18
Typ-$\mathcal{BC}$	Vereinigung der Mengen der Typ-$\mathcal{B}$-und der Typ-$\mathcal{C}$-Blöcke	18
$\vartheta(\mathcal{P})$	zu $\mathcal{P}$ gehörige Folge (vertikaler) Äquivalenzklassen (zweidimensionaler Fall)	33
$\Theta(\Omega^*)$	zu Ω^* gehörige Menge aller (vertikalen) Äquivalenzklassenfolgen (zweidimensionaler Fall)	33
$U(A)_i$	untere Koordinate der i-ten Vertikalkomponente von A	30
$V(A)$	Menge der Koordinaten von vertikalen Verschiebungen in A	30
$V(A)_i$	i-te vertikale Verschiebung in A	30

Literaturverzeichnis

[1] Denker, M., Grillenberger, C., and Sigmund, K. *Ergodic Theory on Compact Spaces.* Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin,Heidelberg,New York, 1976.

[2] Hedlund, G. A. Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system. *Mathematical Systems Theory Vol. 3*, n° 4 (1969), 320–375.

[3] Katok, A., and Hasselblatt, B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, vol. 54 of *Encyclopedia of mathematics and its applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[4] Köhler, S. *Untersuchung zur Faktorbeziehung für mehrdimensionale Parkettsysteme.* Diplomarbeit, Martin-Luther-Universität Halle Wittenberg, 1999.

[5] Krätzel, E. *Zahlentheorie.* Studienbücherei. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1981.

[6] Michel, H. Embedding set configuration spaces into those of Ruelle's point configurations. *Annales de l'Institut Henri Poincaré Vol. 41*, n° 3 (1984), 255–267.

[7] Miebach, J. *Topologische Strukturuntersunchungen von* $\mathbb{Z}^d$*-Subshifts.* Dissertation, Martin-Luther-Universität Halle Wittenberg, 1994.

[8] Querenburg, B. v. *Mengentheoretische Topologie.* Hochschultext. Springer, Berlin,Heidelberg,New York, 1979.

[9] Ruelle, D. *Thermodynamic formalism.* Addison-Wesley, Reading MA, 1978.

[10] Schwenzfeger, G. *Mengen-Konfigurationen-Räume über* $\mathbb{Z}^1$ *als topologische Markov-Ketten.* Dissertation, Martin-Luther-Universität Halle Wittenberg, 1984.