Verallgemeinerte Potenzen und Fundamentallösungen für Cauchy-Riemann-Systeme mit rotationssymmetrischen Koeffizienten

Kristian Rödel

Für rotationssymmetrische Koeffizienten lässt sich die Berechnung der verallgemeinerten Potenzen zum zugehörigen Cauchy-Riemann-System auf die Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen zurückführen (wobei sich im Spezialfall hypergeometrische Differentialgleichungen ergeben). Diese gewöhnlichen Differentialgleichungssysteme werden in der vorliegenden Arbeit näher untersucht, u.a. das Verhalten im Nullpunkt und das Verhalten in einem beliebigen Punkt innerhalb des Trägers des Koeffizienten, falls die Bedingung der gleichmäßigen Elliptizität dort verletzt ist.
Einen weiteren Gegenstand dieser Arbeit bildet die Fundamentallösung des $(0, \mu)$-Systems mit einem rotationssymmetrischen Koeffizienten μ, die außerhalb des Trägers von μ mittels gewisser Funktionen, die auch zur Konstruktion der verallgemeinerten Potenzen zum zugehörigen $(0, \overline{\mu})$-System dienen, dargestellt wird.

1. Einleitung

Es sei ein Cauchy-Riemann-System, d.h. ein gleichmäßig elliptisches System der Form

$$f_{\overline{z}} = \nu(z) f_z + \mu(z) \overline{f_z} \tag{1}$$

gegeben, wobei die Koeffizienten ν, μ die Bedingungen

$$supp(|\nu| + |\mu|) =: \mathcal{K} \subset\subset \mathbb{C}, \;\; \nu, \mu \in L_\infty, \;\; \| |\nu| + |\mu| \|_{L_\infty} \leq const =: k < 1 \tag{2}$$

erfüllen. Dabei ist das System

$$f_{\overline{z}} = \nu(z) f_z \tag{3}$$

ein Beltrami-System, wogegen das System

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) \overline{f_z} \tag{4}$$

Anti-Beltrami-System heißen soll.

Es gilt folgender

SATZ 1 ([**7**]). *Es sei $n \neq 0$ eine ganze Zahl und $c \neq 0$ eine beliebige komplexe Zahl. Unter den Bedingungen (2) und $\nu, \mu \in HL_p(\{z_0\}, \{\infty\})$ existiert genau eine (ν, μ)-Lösung $w(z)$ in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ mit den Eigenschaften*

1. *$w(z)$ hat in z_0 eine asymptotische Entwicklung*
$$w(z) = c\left(z - z_0 + \mathfrak{b}\overline{(z - z_0)}\right)^n - b\overline{c}\left(\overline{z - z_0} + \overline{\mathfrak{b}}(z - z_0)\right)^n + O\left(|z - z_0|^{n+\alpha}\right),$$
mit bestimmten $b, \mathfrak{b}$ und $\alpha > 0$,
2. *der Punkt ∞ ist ein Punkt der Ordnung $-n$ von $w(z)$.*

Dieses eindeutig bestimmte $w(z)$ wird verallgemeinerte n-te Potenz genannt und mit $[c(z - z_0)^n]_{(\nu,\mu)}$ bezeichnet.

Die Fundamentallösung des Systems (1) sei wie folgt definiert.

DEFINITION 1 ([**6**], IV.3.3). *Für die Koeffizienten ν und μ gelte (2). Die Funktion $H(t, z, \nu, \mu)$ heiße Fundamentallösung des (ν, μ)-Systems, wenn gilt:*

(I) *Für beliebiges, aber festes $z \in \mathbb{C}$ ist $r_\infty(t, z) := H(t, z, \nu, \mu) - \log(t - z)$ als Funktion von t in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ eindeutig (erklärbar) und stetig,*
(II) *für z wie in (I) gehört $r_\infty(t, z)$ als Funktion von t zu $L_r(K)$ für jedes endliche $r \geq 1$ und jede beschränkte messbare Menge K,*
(III) *für z wie in (I) ist $H(t, z, \nu, \mu)$ eine (ν, μ)-Lösung in (jedem einfach zusammenhängenden Teilgebiet von) $\mathbb{C} \setminus \{z\}$,*
(IV) *für z wie in (I) gilt $\lim\limits_{t \to \infty} r_\infty(t, z) = 0$.*

Die Funktion $H(t, z, \nu, \mu)$ ist durch die Eigenschaften (I)-(IV) eindeutig bestimmt.

Es sei G eine offene Menge mit $G \subseteqq \mathbb{C}$, $L^{p,q}(G) := L_p(G) \cap L_q(G)$, $L^{p,q} := L^{p,q}(\mathbb{C})$, $p, q \in [1, +\infty)$. Dann sei

$$Ph(z) := -\frac{1}{\pi} \iint \frac{h(t)}{t - z}\, d\sigma_t$$

für $h \in L^{p,q}$, $1 \leq q < 2 < p < \infty$ und

$$P_0 g(z) := -\frac{1}{\pi} \iint g(t) \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t} \right) d\sigma_t$$

für $g \in L_p$, $2 < p < \infty$.

Der Operator P wird Cauchy-Transformation genannt. Sei nun G ein beschränktes Gebiet. Die Cauchy-Transformation P lässt sich auch auf $L_q(G)$ für $1 < q \leq 2$ definieren (siehe z.B. [**6**], 0.4.30); dazu folgende

Definition 2. *Es sei G ein beschränktes Gebiet und $1 < q \leq 2$. Dann sei*

$$P_G h(z) := -\frac{1}{\pi} \iint\limits_G \frac{t h(t)}{(t-z)^2}\, d\sigma_t + \frac{z}{\pi} \iint\limits_G \frac{h(t)}{(t-z)^2}\, d\sigma_t$$

für $h \in L_q(G)$.

Dieser Operator kann auch durch stetige Fortsetzung von einer auf $L_q(G)$ dichten Teilmenge auf den ganzen $L_q(G)$ definiert werden, es gilt nämlich folgender

Satz 2 ([**14**], S. 40f.). *Für jedes beschränkte Gebiet G ist P_G ein beschränkter Operator von $L_q(G)$ in $L_r(G)$ für jedes q mit $1 < q \leq 2$ und jedes r mit $1 \leq r < \frac{2q}{2-q}$, d.h.*

$$\|P_G h\|_{L_r(G)} \leq M_{q,r,G} \|h\|_{L_q(G)}$$

mit einer nur von q, r, G abhängenden Konstanten $M_{q,r,G}$.

Sei D ein Gebiet mit $D \subseteq \mathbb{C}$. Der Kürze halber sei

$$\begin{aligned} B_p(D) &= W^1_{p,loc}(D) \cap C(D), \\ A(D) &= \{f \ : \ f \text{ ist analytisch in } D\}, \\ \mathcal{A}(D, \nu, \mu) &= \{f \ : \ f \text{ ist } (\nu,\mu)\text{-Lösung in } D\} \end{aligned}$$

gesetzt.

Hilfssatz 1 ([**6**], IV.1.3). *Die Koeffizienten ν und μ mögen die Bedingung (2) erfüllen. Die Konstante $\delta \in [2-\delta, 2+\delta]$ sei so gewählt, dass*

$$kC(s) < 1 \ \forall s \in [2-\delta, 2+\delta]$$

gilt, wobei $C(s)$ die Norm des Hilbert-Operators T in L_s sei. Dann bildet der Operator $V = V_{\nu,\mu}$ mit

$$Vh(z) := h(z) - P(\nu h_z + \mu \overline{h_z})(z)$$

jedes $B_p(D)$ mit $p \in (2, 2+\delta]$ und $D \Supset \mathcal{K}$ umkehrbar eindeutig auf sich ab (hierbei wird $\nu(z)f(z) = \mu(z)f(z) = 0$ gesetzt für $z \notin \mathcal{K}$ und jede Funktion f).

SATZ 3 ([**6**], IV.1.9). *Die Funktionen ν und μ mögen die Bedingung (2) erfüllen. Es gibt zwei f.ü. in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ definierte Funktionen $\Phi_1(t, z)$ und $\Phi_2(t, z)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(I) *Es sind $\Phi_1(t, z)$, $\Phi_2(t, z) \in L_q$ als Funktionen von t bei beliebigem, aber festem $z \in \mathbb{C}$ für jedes $q \in [1, 2)$;*
supp$(|\Phi_1(\cdot, z)| + |\Phi_2(\cdot, z)|)$ ist enthalten in $\mathcal{K}$.

(II) *Es gilt für alle $g \in B_p(D)$ mit $2 < p \leq 2 + \delta$, $\mathcal{K} \Subset D$*

$$Ug(z) := g(z) + \frac{1}{\pi} \iint \left(\Phi_1(t, z) g_t + \Phi_2(t, z) \overline{g_t}\right) d\sigma_t = V^{-1} g(z)$$

(hierbei wird $\Phi_1(t, z)f(t) = \Phi_2(t, z)f(t) = 0$ gesetzt $\forall t \notin \mathcal{K}$ und jede Funktion f; V^{-1} ist der inverse Operator zu V; δ wie in Hilfssatz 1; Integrale, bei denen kein Integrationsbereich angegeben ist, sind über den gesamten Träger des Integranden zu berechnen).

(III) *Wenn $g \in B_p(D)$ (p, D wie in (II)) auf einer offen Teilmenge $D' \subseteq D$ analytisch ist, so ist Ug eine (ν, μ)-Lösung in D'. Insbesondere ist U eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $A(D)$ auf $\mathcal{A}(D, \nu, \mu)$.*

(IV) *Die Funktionen $\Phi_1(\cdot, z)$ und $\Phi_2(\cdot, z)$ mit den in (I), (II) genannten Eigenschaften sind für beliebiges, aber festes $z \in \mathbb{C}$ als Elemente des L_q eindeutig bestimmt.*

Aus dem Beweis des Satzes ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, z) &= -\frac{\nu(t)}{t - z} + \nu(t) T\Phi_1(\cdot, z)(t) + \overline{\mu(t)}\, \overline{T} \Phi_2(\cdot, z)(t) \qquad (5) \\ \Phi_2(t, z) &= -\frac{\mu(t)}{t - z} + \mu(t) T\Phi_1(\cdot, z)(t) + \overline{\nu(t)}\, \overline{T} \Phi_2(\cdot, z)(t) \end{aligned}$$

mit $\overline{T}h := \overline{T\overline{h}}$. Setzt man nun

$$F := \Phi_1 + \overline{\Phi_2}, \qquad G := \Phi_1 - \overline{\Phi_2},$$

so erhält man folgenden Zusammenhang zwischen Fundamentallösung und Kernen.

SATZ 4 ([**6**], IV.3.5). *Die Koeffizienten ν und μ mögen die Bedingung (2) erfüllen. Dann ist die Funktion*

$$M(t, z) := \log(t - z) - PF(\cdot, z)(t)$$

Fundamentallösung zum $(\nu, \overline{\mu})$-System.

2. Verallgemeinerte Potenzen für rotationssymmetrische Koeffizienten

2.1. Transformation des Cauchy-Riemannschen Systems in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem. Untersucht werden in diesem Kapitel (ν, μ)-Systeme, wobei die Koeffizienten ν und μ die Gestalt

$$\nu(z) = \begin{cases} g(|z|)z^2 & : \ r \leq |z| \leq R, \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases} \tag{6}$$

und

$$\mu(z) = \begin{cases} f(|z|)z^m & : \ r \leq |z| \leq R, \\ 0 & : \ \text{sonst}, \end{cases} \tag{7}$$

mit $0 < r < R < \infty$ haben und f, g gewisse Funktionen im Intervall $[r, R]$ sind.

Wie sich zeigen wird, ist es möglich, das partielle Differentialgleichungssystem (1) in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem zu transformieren und damit die verallgemeinerten Potenzen zu berechnen.

Es wird der folgende bekannte Satz aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen benötigt.

Satz 5 ([**1**], 3.26). *Es sei das Randwertproblem*

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\beta = \mathfrak{B}_a \begin{pmatrix} y_1(a) \\ \vdots \\ y_n(a) \end{pmatrix} + \mathfrak{B}_b \begin{pmatrix} y_1(b) \\ \vdots \\ y_n(b) \end{pmatrix} \tag{9}$$

mit $\mathfrak{B}_a, \mathfrak{B}_b \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\beta \in \mathbb{R}^n$ und den Funktionen $a_{i,j}, f_i \in C[a, b]$ für $1 \leq i, j \leq n$ gegeben. Genau dann ist das Randwertproblem eindeutig lösbar, wenn die Matrix $\mathfrak{Q} := \mathfrak{B}_a\mathfrak{Y}_(a) + \mathfrak{B}_b\mathfrak{Y}(b)$ nicht singulär ist. Dabei ist die Matrix $\mathfrak{Y}(t)$ ein beliebiges Fundamentalsystem zum zugehörigen homogenen System.

Es gilt somit

Folgerung 1. *Das Randwertproblem (8), (9) ist genau dann eindeutig lösbar, falls das zugehörige homogene Problem*

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix},$$

$$0 = \mathfrak{B}_a \begin{pmatrix} y_1(a) \\ \vdots \\ y_n(a) \end{pmatrix} + \mathfrak{B}_b \begin{pmatrix} y_1(b) \\ \vdots \\ y_n(b) \end{pmatrix}$$

nur die triviale Lösung besitzt.

Für (ν, μ)-Systeme der oben genannten Art kann man, wie schon erwähnt, das partielle Differentialgleichungssystem (1) in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem transformieren. Dieses erreicht man, indem man für die verallgemeinerte Potenz einen gewissen Ansatz wählt und diesen dann in die partielle Differentialgleichung (1) einsetzt. Es soll nun kurz beschrieben werden, wie dieser Ansatz erhalten wurde.

Im Beweis zu Satz 1 wird untersucht, ob eine Funktion, hier mit v bezeichnet, existiert, so dass die Funktion $F(z)$ dem Ansatz

$$F(z) = cz^n + z^n P_0 v(z)$$

genügt, wobei F eine (ν, μ)-Lösung sei, und dann wird nachgewiesen, dass diese Funktion $F(z)$ eine verallgemeinerte Potenz ist. Dieser Ansatz führt zu der Gleichung

$$v = A + Sv + Rv$$

mit einer gewissen Funktion A und gewissen Operatoren S und R (vgl.[**7**], 2.7). Somit erhält man

$$v(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (S+R)^j A \tag{10}$$

und die Reihe würde konvergieren in $L_p(\mathbb{C})$ für alle $p \in (1, +\infty)$, für die die Norm des Operators $S + R$ in $L_p(\mathbb{C})$ kleiner 1 wäre. Berechnet man unter dieser Annahme v für die oben genannten ν und μ mittels (10), erhält man schließlich einen Ansatz für v und damit auch für die verallgemeinerte Potenz, der sich als zweckmäßig erweist, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 6. *Es seien $m, n \in \mathbb{Z}$, $0 < r < R < \infty$ beliebig, aber fest,*

$$\nu(z) = \begin{cases} g(|z|)z^2 & : \; r \le |z| \le R, \\ 0 & : \; \textit{sonst} \end{cases} \tag{11}$$

und

$$\mu(z) = \begin{cases} f(|z|)z^m & : \; r \le |z| \le R, \\ 0 & : \; \textit{sonst,} \end{cases} \tag{12}$$

wobei $f(|z|)$ und $g(|z|)$ stetig in $\{z : r \le |z| \le R\}$ seien.

Dann sind die verallgemeinerten Potenzen $[cz^n]_{(\nu,\mu)}$ *für* $2n-m<0$ *gegeben durch*

$$[cz^n]_{(\nu,\mu)} = cz^n + 2\begin{cases} \overline{c}\frac{r^{2n-m}}{z^{n-m}}\overline{F_{1,n}(r)} & : \quad |z| \le r, \\ \overline{c}\frac{|z|^{2n-m}}{z^{n-m}}\overline{F_{1,n}(|z|)} + cF_{2,n}(|z|)z^n & : \quad r \le |z| \le R, \\ cF_{2,n}(R)z^n & : \quad |z| \ge R \end{cases} \tag{13}$$

und für $0 \le 2n-m$ *durch*

$$[cz^n]_{(\nu,\mu)} = cz^n + 2\begin{cases} 0 & : \quad |z| \le r, \\ \overline{c}\frac{|z|^{2n-m}}{z^{n-m}}\overline{F_{1,n}(|z|)} + cF_{2,n}(|z|)z^n & : \quad r \le |z| \le R, \\ \overline{c}\frac{R^{2n-m}}{z^{n-m}}\overline{F_{1,n}(R)} + cF_{2,n}(R)z^n & : \quad |z| \ge R, \end{cases} \tag{14}$$

wobei die Funktionen $F_{1,n}(|z|)$ *und* $F_{2,n}(|z|)$ *in* $\{z : r \le |z| \le R\}$ *die eindeutig bestimmten Lösungen des Differentialgleichungssystems*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F'_{1,n}(x) \\ F'_{2,n}(x) \end{pmatrix} &= \frac{1}{|1-\nu(x)|^2 - |\mu(x)|^2} \\ &\times \begin{pmatrix} \frac{m(\overline{\nu(x)} - |\nu(x)|^2 + |\mu(x)|^2) + (m-2n)(1-\nu(x))}{x} & \frac{2n\overline{\mu(x)}}{x} \\ \frac{2(m-n)\mu(x)}{x} & \frac{2n(\nu(x) - |\nu(x)|^2 + |\mu(x)|^2)}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{1,n}(x) \\ F_{2,n}(x) \end{pmatrix} \\ &+ \frac{n}{(|1-\nu(x)|^2 - |\mu(x)|^2)x} \begin{pmatrix} \overline{\mu(x)} \\ \nu(x) - |\nu(x)|^2 + |\mu(x)|^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{15}$$

sind, die für $2n-m<0$ *die Randbedingungen*

$$F_{1,n}(R) = F_{2,n}(r) = 0 \tag{16}$$

und für $0 \le 2n-m$ *die Anfangsbedingungen*

$$F_{1,n}(r) = F_{2,n}(r) = 0 \tag{17}$$

erfüllen.

Beweis. Es sei für $2n-m<0$

$$F_\varepsilon(z) := \varepsilon cz^n + 2\begin{cases} \overline{c}\frac{r^{2n-m}}{z^{n-m}}\overline{F_{1,n}(r)} & : \quad |z| \le r, \\ \overline{c}\frac{|z|^{2n-m}}{z^{n-m}}\overline{F_{1,n}(|z|)} + cF_{2,n}(|z|)z^n & : \quad r \le |z| \le R, \\ cF_{2,n}(R)z^n & : \quad |z| \ge R \end{cases} \tag{18}$$

und für $0 \le 2n-m$

$$F_\varepsilon(z) := \varepsilon cz^n + 2\begin{cases} 0 & : \quad |z| \le r, \\ \overline{c}\frac{|z|^{2n-m}}{z^{n-m}}\overline{F_{1,n}(|z|)} + cF_{2,n}(|z|)z^n & : \quad r \le |z| \le R, \\ \overline{c}\frac{R^{2n-m}}{z^{n-m}}\overline{F_{1,n}(R)} + cF_{2,n}(R)z^n & : \quad |z| \ge R \end{cases} \tag{19}$$

mit $\varepsilon \in \{\{0\},\{1\}\}$. Es soll nun untersucht werden, unter welchen Bedingungen an $F_{1,n}$ und $F_{2,n}$ die Funktion F_ε (ν,μ)-Lösung in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (für $n \geq 1$ in $\mathbb{C}$) ist.

Zunächst ergeben sich unmittelbar aus der notwendigen Stetigkeit der Lösung die Anfangs- bzw. Randbedingungen (16) und (17).

Des Weiteren ist notwendig, dass F_ε die Differentialgleichung

$$F_{\varepsilon_{\overline{z}}}(z) = \nu(z)F_{\varepsilon_z}(z) + \mu(z)\overline{F_{\varepsilon_z}(z)}$$

erfüllt. Setzt man $F_\varepsilon(z)$ in die Differentialgleichung ein, so erhält man für $r \leq |z| \leq R$

$$\begin{aligned}
&\overline{c}\frac{(2n-m)|z|^{2n-m-2}}{z^{n-m-1}}\overline{F_{1,n}(|z|)} + \overline{c}\frac{|z|^{2n-m-1}}{z^{n-m-1}}\overline{F'_{1,n}(|z|)} + c\frac{z^{n+1}}{|z|}F'_{2,n}(|z|)\\
=&g(|z|)z^2\Bigg(\varepsilon c n z^{n-1} + \overline{c}\frac{(2n-m)|z|^{2n-m}}{z^{n-m+1}}\overline{F_{1,n}(|z|)} - \overline{c}\frac{2(n-m)|z|^{2n-m}}{z^{n-m+1}}\overline{F_{1,n}(|z|)}\\
&\qquad +\overline{c}\frac{|z|^{2n-m+1}}{z^{n-m+1}}\overline{F'_{1,n}(|z|)} + 2cnz^{n-1}F_{2,n}(|z|) + cz^{n-1}|z|F'_{2,n}(|z|)\Bigg) \qquad (20)\\
&+ f(|z|)z^m\Bigg(\overline{\varepsilon c}n\frac{|z|^{2n-2}}{z^{n-1}} + c(2n-m)|z|^{m-2}z^{n-m+1}F_{1,n}(|z|)\\
&\qquad -2c(n-m)|z|^{m-2}z^{n-m+1}F_{1,n}(|z|) + c|z|^{m-1}z^{n-m+1}F'_{1,n}(|z|)\\
&\qquad +2n\overline{c}\frac{|z|^{2n-2}}{z^{n-1}}\overline{F_{2,n}(|z|)} + \overline{c}\frac{|z|^{2n-1}}{z^{n-1}}\overline{F'_{2,n}(|z|)}\Bigg).
\end{aligned}$$

Die Gleichung (20) wäre erfüllt, falls gelten würde

$$\begin{aligned}
&(2n-m)|z|^{2n-m-2}F_{1,n}(|z|) + |z|^{2n-m-1}F'_{1,n}(|z|)\\
=&\overline{g(|z|)}\left((2n-m)|z|^{2n-m}F_{1,n}(|z|) - 2(n-m)|z|^{2n-m}F_{1,n}(|z|)\right.\\
&\qquad \left.+|z|^{2n-m+1}F'_{1,n}(|z|)\right)\\
&+\overline{f(|z|)}\left(\varepsilon n|z|^{2n-2} + 2n|z|^{2n-2}F_{2,n}(|z|) + |z|^{2n-1}F'_{2,n}(|z|)\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|z|}F'_{2,n}(|z|) = g(|z|)\left(\varepsilon n + 2nF_{2,n}(|z|) + |z|F'_{2,n}(|z|)\right)\\
&+ f(|z|)\left((2n-m)|z|^{m-2}F_{1,n}(|z|) - 2(n-m)|z|^{m-2}F_{1,n}(|z|)\right.\\
&\qquad \left.+|z|^{m-1}F'_{1,n}(|z|)\right).
\end{aligned}$$

Nach weiterer leichter Rechnung erhält man, wenn man $x = |z|$ setzt,

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} F'_{1,n}(x)\\ F'_{2,n}(x)\end{pmatrix} = \frac{1}{|1-\nu(x)|^2 - |\mu(x)|^2} \qquad (21)\\
&\times\begin{pmatrix} \frac{m(\overline{\nu(x)}-|\nu(x)|^2+|\mu(x)|^2)+(m-2n)(1-\nu(x))}{x} & \frac{2n\overline{\mu(x)}}{x}\\ \frac{2(m-n)\mu(x)}{x} & \frac{2n(\nu(x)-|\nu(x)|^2+|\mu(x)|^2)}{x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{1,n}(x)\\ F_{2,n}(x)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$+\frac{n\varepsilon}{(|1-\nu(x)|^2-|\mu(x)|^2)x}\begin{pmatrix}\overline{\mu(x)}\\ \nu(x)-|\nu(x)|^2+|\mu(x)|^2\end{pmatrix},$$

d.h. F_1 ist (ν,μ)-Lösung, wenn das System (21) mit $\varepsilon=1$ und den Anfangs- bzw. Randbedingungen (16) und (17) lösbar ist.

Für $0\le 2n-m$ folgt nach dem Satz von Picard-Lindelöf die eindeutige Lösbarkeit dieses Systems in $\{z: r\le |z|\le R\}$.

Für $2n-m<0$ ist das Randwertproblem nach Folgerung 1 genau dann eindeutig lösbar, wenn das zugehörige homogene Problem

$$\begin{pmatrix}F'_{1,n}(x)\\ F'_{2,n}(x)\end{pmatrix}=\frac{1}{|1-\nu(x)|^2-|\mu(x)|^2} \tag{22}$$
$$\times\begin{pmatrix}\frac{m(\overline{\nu(x)}-|\nu(x)|^2+|\mu(x)|^2)+(m-2n)(1-\nu(x))}{x} & \frac{2n\overline{\mu(x)}}{x}\\ \frac{2(m-n)\mu(x)}{x} & \frac{2n(\nu(x)-|\nu(x)|^2+|\mu(x)|^2)}{x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_{1,n}(x)\\ F_{2,n}(x)\end{pmatrix}$$

$$F_{1,n}(R)=F_{2,n}(r)=0 \tag{23}$$

nur die triviale Lösung $F_{1,n}(x)=F_{2,n}(x)\equiv 0$ besitzt.

Nun folgt aus (21), dass F_0 dann (ν,μ)-Lösung in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ist, wenn $F_{1,n}$ und $F_{2,n}$ (22) und (23) erfüllen.

Angenommen, es gibt eine nichttriviale Lösung. Für diese Lösung folgt dann $F_{1,n}(r)\neq 0$ und $F_{2,n}(R)\neq 0$. Denn wäre $F_{1,n}(r)=0$, so erhielte man aus der eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems (22) mit den Anfangswerten $F_{1,n}(r)=0$, $F_{2,n}(r)=0$ nur die triviale Lösung. Analog schließt man für $F_{2,n}(R)=0$.

Nun hat die (ν,μ)-Lösung F_0 nach dem Darstellungstheorem die Gestalt $F_0(z)=G(\chi(z))$ mit einer quasikonformen Abbildung χ von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}$ und einer in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ analytischen Funktion G. Diese Funktion G hätte in Unendlich (wegen $F_{2,n}(R)\neq 0$) einen Punkt der Ordnung $-n$ und im Nullpunkt (wegen $F_{1,n}(r)\neq 0$) einen Punkt der Ordnung $m-n>n$, was nicht möglich ist. Man erhält also einen Widerspruch zur Annahme, dass eine nichttriviale Lösung existiert. Daher besitzt das homogene Problem nur die triviale Lösung, d.h. das Randwertproblem (15), (16) ist eindeutig lösbar.

Die Funktion F_1 besitzt auch die in Satz 1 geforderte asymptotische Entwicklung, wie sich aus (13) und (14) unmittelbar ergibt. Nach Satz 1 existiert genau eine Lösung mit den dort geforderten Eigenschaften, d.h. die Funktion F_1 ist die gesuchte verallgemeinerte Potenz.

□

Ein Spezialfall des Satzes 6 wurde schon in [**9**], Satz 7 bewiesen.

Unter weiteren Zusatzbedingungen soll nun die Gestalt des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems weiter transformiert und möglichst vereinfacht werden.

FOLGERUNG 2. *Der Koeffizient μ erfülle (12), $f(x)$ sei zusätzlich differenzierbar im Intervall $[r,R]$ und $\nu \equiv 0$ in $\mathbb{C}$. Dann erfüllt die Funktion $F_{1,n}(x)$ in $[r,R]$ die gewöhnliche Differentialgleichung*

$$\begin{aligned}
&F''_{1,n}(x)(1-|\mu(x)|^2)x^2\overline{\mu(x)}\\
&+F'_{1,n}(x)x\Big(-(|\mu(x)|^2)'x\overline{\mu(x)}+(1-m+2n)\overline{\mu(x)}\\
&\qquad -(1+m+2n)\overline{\mu(x)}|\mu(x)|^2-(1-|\mu(x)|^2)x\overline{\mu'(x)}\Big) \qquad (24)\\
&+F_{1,n}(x)\Big(-2nm\overline{\mu(x)}|\mu(x)|^2-m(|\mu(x)|^2)'x\overline{\mu(x)}\\
&\qquad +(m-2n+m|\mu(x)|^2)\overline{\mu'(x)}x\Big)=0
\end{aligned}$$

und für $2n-m<0$ die Randbedingungen

$$\begin{aligned}
-\frac{m|\mu(r)|^2+m-2n}{(1-|\mu(r)|^2)r}F_{1,n}(r)+F'_{1,n}(r) &= \frac{n\overline{\mu(r)}}{(1-|\mu(r)|^2)r}, \qquad (25)\\
F_{1,n}(R) &= 0
\end{aligned}$$

und für $0\le 2n-m$ die Anfangsbedingungen

$$F_{1,n}(r)=0, \qquad F'_{1,n}(r)=\frac{n\overline{\mu(r)}}{(1-|\mu(r)|^2)r}. \qquad (26)$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus (15) nach leichter Rechnung.
□

Eine weitere Transformation des Differentialgleichungssystems (15) liefert

FOLGERUNG 3. *Der Koeffizient μ erfülle (12), $f(x)$ sei zusätzlich differenzierbar in $[r,R]$ und $\nu\equiv 0$ in $\mathbb{C}$. Dann haben die Funktionen $F_{1,n}(x)$ und $F_{2,n}(x)$ für $n\neq m$ die Gestalt*

$$\begin{aligned}
F_{1,n}(x) &= \frac{n}{2(n-m)}\Big(\overline{\mu(x)}a(x)-x^{m-2n}b(x)\Big),\\
F_{2,n}(x) &= \frac{1}{2}\Big(a(x)-x^{m-2n}\mu(x)b(x)\Big)-\frac{1}{2}, \qquad (27)
\end{aligned}$$

wobei die Funktionen $a(x)$ und $b(x)$ in $[r,R]$ die eindeutig bestimmten Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned}
a'(x) &= \frac{1}{x^{2n}}\left(x^m\mu(x)b(x)\right)',\\
b'(x) &= x^{2(n-m)}\Big(x^m\overline{\mu(x)}a(x)\Big)' \qquad (28)
\end{aligned}$$

sind, die für $2n - m < 0$ die Randbedingungen

$$a(r) = 1 + r^{m-2n}\mu(r)b(r), \qquad b(R) = R^{2n-m}\overline{\mu(R)}a(R)$$

und für $0 \leq 2n - m$ die Anfangsbedingungen

$$a(r) = \frac{1}{1 - |\mu(r)|^2}, \qquad b(r) = \frac{\overline{\mu(r)}r^{2n-m}}{1 - |\mu(r)|^2}$$

erfüllen.

Beweis. Setzt man den Ansatz (27) in (15) ein, so folgt die Behauptung nach leichter Rechnung. Die eindeutige Bestimmtheit der Lösungen wurde schon in Satz 6 gezeigt.
□

ANMERKUNG 1. *In Folgerung 3 wird $n \neq m$ vorausgesetzt. Für $n = m$ erhält man aus (15) (mit $\nu \equiv 0$) die gewöhnliche lineare Differentialgleichung 1.Ordnung*

$$F'_{2,n}(x) - \frac{2n|\mu(x)|^2}{(1 - |\mu(x)|^2)x}F_{2,n}(x) = \frac{n|\mu(x)|^2}{(1 - |\mu(x)|^2)x}.$$

2.2. Der Fall $r = 0$. Im Satz 6 wurden die verallgemeinerten Potenzen in $\{z : r \leq |z| \leq R\}$ berechnet, allerdings mit der Einschränkung $r > 0$. Es sei nun zusätzlich $\nu \equiv 0$ und

$$\mu(z) = \begin{cases} f(|z|)z^m & : \quad |z| \leq R, \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j x^{j-m} & : \quad 0 \leq x \leq R, \\ 0 & : \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen sich auch für $r = 0$ Lösungen $F_{1,n}$, $F_{2,n}$ des Differentialgleichungssystems (15) ergeben, so dass für $2n - m < 0$

$$[cz^n]_\mu = cz^n + 2\begin{cases} \overline{c}\frac{|z|^{2n-m}}{z^{n-m}}\overline{F_{1,n}(|z|)} + cF_{2,n}(|z|)z^n & : \quad |z| \leq R, \\ cF_{2,n}(R)z^n & : \quad |z| \geq R \end{cases} \tag{29}$$

und für $0 \leq 2n - m$

$$[cz^n]_\mu = cz^n + 2\begin{cases} \overline{c}\frac{|z|^{2n-m}}{z^{n-m}}\overline{F_{1,n}(|z|)} + cF_{2,n}(|z|)z^n & : \quad |z| \leq R, \\ \overline{c}\frac{R^{2n-m}}{z^{n-m}}\overline{F_{1,n}(R)} + cF_{2,n}(R)z^n & : \quad |z| \geq R \end{cases} \tag{30}$$

die gesuchten verallgemeinerten Potenzen bilden (dabei werden nur die nichttrivialen Lösungen, d.h. Lösungen für $n \neq 0$, betrachtet).

Die verallgemeinerte Potenz $[cz^n]_\mu$ besitzt definitionsgemäß im Punkt $z_0 = 0$ die asymptotische Entwicklung

$$[cz^n]_\mu = cz^n + \overline{c}\mu(0)\overline{z}^n + O(|z|^{n+\alpha}) \tag{31}$$

mit einem $\alpha > 0$. Vergleicht man (31) mit (29) bzw. (30), so erhält man die Bedingung

$$cz^n + \overline{c}\mu(0)\overline{z}^n + O(|z|^{n+\alpha}) = c(1 + 2F_{2,n}(|z|))z^n + 2\overline{c}\frac{z^m}{|z|^m}\overline{F_{1,n}(|z|)}\overline{z}^n.$$

Setzt man $z = |z|e^{\imath\phi}$, dividiert beide Seiten durch $|z|^n$ und lässt danach $|z|$ längs der positiv reellen Achse gegen Null streben, so folgt, wenn man $e^{\imath\phi} = \zeta$ setzt

$$c\zeta^{2n} + \overline{c}\mu(0) = c(1 + 2F_{2,n}(0))\zeta^{2n} + 2\overline{c}\overline{F_{1,n}(0)}\zeta^m \tag{32}$$

für $|\zeta| = 1$, und auf Grund des Identitätssatzes für analytische Funktionen dann auch für alle $\zeta \neq 0$ (für alle ζ, wenn $n \geq 0$ und $m \geq 0$ sind).

Es ergeben sich nun folgende Fälle. Falls $m \neq 0$ und $2n \neq m$ gelten, so folgt aus (32)

$$\overline{F_{1,n}(0)} = 0, \qquad \mu(0) = 0, \qquad F_{2,n}(0) = 0. \tag{33}$$

Falls $2n = m$ gilt, so folgt

$$2\overline{c}\overline{F_{1,n}(0)} + 2cF_{2,n}(0) = 0, \qquad \mu(0) = 0. \tag{34}$$

Falls $m = 0$ gilt, so folgt

$$2\overline{F_{1,n}(0)} = \mu(0), \qquad F_{2,n}(0) = 0. \tag{35}$$

Für $2n = m$ sind die Funktionen $F_{1,n}$ und $F_{2,n}$ durch (34) nicht eindeutig bestimmt. Denn setzt man

$$2\overline{c}\overline{F_{1,n}(0)} = \lambda, \qquad 2cF_{2,n}(0) = -\lambda,$$

so ist für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ das zugehörige Anfangswertproblem nach dem Satz von Picard-Lindelöf, der wegen der in (34) geforderten Bedingung $\mu(0) = 0$ anwendbar ist, eindeutig lösbar. Allerdings folgt aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz 1, dass die verallgemeinerte Potenz unabhängig von λ ist. Man kann also λ beliebig vorgeben.

Daher sind für $2n - m < 0$ die Randbedingungen

$$2F_{1,n}(0) = \overline{\mu(0)}, \quad F_{2,n}(0) = 0, \quad F_{1,n}(R) = 0, \tag{36}$$

wobei im Fall $\mu(0) \neq 0$ zusätzlich noch $m = 0$ sei, und für $0 \leq 2n - m$ die Anfangsbedingungen

$$2F_{1,n}(0) = \overline{\mu(0)}, \quad F_{2,n}(0) = 0, \tag{37}$$

wobei im Fall $\mu(0) \neq 0$ zusätzlich noch $m = 0$ sei, notwendig und hinreichend dafür, dass (29) bzw. (30), falls Lösungen dieser Gestalt existieren, verallgemeinerte Potenzen bilden. Zu untersuchen bleibt, ob Lösungen von (15) mit (36) bzw. (37) existieren; dazu wird der folgende Satz benötigt.

Satz 7 ([**5**], 9.2). *Gegeben sei die Differentialgleichung*

$$(x-a)^2 y''(x) + (x-a)p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

mit

$$p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m (x-a)^m, \qquad q(x) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m (x-a)^m, \tag{38}$$

und die Potenzreihen mögen in $|x-a| < R$ *konvergieren. Sind* z_1 *und* z_2 *die Nullstellen der charakteristischen Gleichung*

$$f(z) = z(z-1) + p_0 z + q_0 = 0 \tag{39}$$

mit $Re z_1 \geq Re z_2$, *so erhält man in* $0 < |x-a| < R$ *eine Lösung*

$$y_1(x) = |x-a|^{z_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k, \qquad c_0 = 1.$$

Ist $z_1 - z_2 \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, *so ist*

$$y_2(x) = |x-a|^{z_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (x-a)^k, \qquad d_0 = 1$$

eine von y_1 *linear unabhängige Lösung.*
Ist $z_1 = z_2$, *so ist*

$$y_2(x) = y_1(x) \ln|x-a| + |x-a|^{z_2} \sum_{k=1}^{\infty} d_k (x-a)^k$$

eine von y_1 *linear unabhängige Lösung.*
Ist $z_1 = z_2 + n$, $n \in \mathbb{N}$, *so ist stattdessen*

$$y_2(x) = \beta y_1(x) \ln|x-a| + |x-a|^{z_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (x-a)^k, \qquad d_0 = 1,$$

wobei β *Null sein kann.*

Somit erhält man

Satz 8. *Es seien* $m, n \in \mathbb{Z}$, $0 < R < \infty$ *beliebig, aber fest,* $\nu \equiv 0$ *in* $\mathbb{C}$ *und*

$$\mu(z) = \begin{cases} f(|z|) z^m & : \quad |z| \leq R, \\ 0 & : \quad \textit{sonst} \end{cases} \tag{40}$$

mit

$$f(|z|) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j |z|^{j-m} & : \quad |z| \leq R, \\ 0 & : \quad sonst. \end{cases} \tag{41}$$

Wenn entweder $\mu(0) = 0$ *oder wenn* $\mu(0) \neq 0,\ m = 0$ *gelten, so sind die verallgemeinerten Potenzen* $[cz^n]_\mu$
für $2n - m < 0$ *gegeben durch*

$$[cz^n]_\mu = cz^n + 2 \begin{cases} \overline{c} \frac{|z|^{2n-m}}{z^{n-m}} \overline{F_{1,n}(|z|)} + cF_{2,n}(|z|) z^n & : \quad |z| \leq R, \\ cF_{2,n}(R) z^n & : \quad |z| \geq R, \end{cases} \tag{42}$$

wobei im Fall $\mu(0) = 0$ *für* $2n - m = -1$ *noch die zusätzlich notwendige Voraussetzung* $\mu'(0) = 0$ *erfüllt sein muss,*
und für $0 \leq 2n - m$ *durch*

$$[cz^n]_\mu = cz^n + 2 \begin{cases} \overline{c} \frac{|z|^{2n-m}}{z^{n-m}} \overline{F_{1,n}(|z|)} + cF_{2,n}(|z|) z^n & : \quad |z| \leq R, \\ \overline{c} \frac{R^{2n-m}}{z^{n-m}} \overline{F_{1,n}(R)} + cF_{2,n}(R) z^n & : \quad |z| \geq R, \end{cases} \tag{43}$$

wobei die Funktionen $F_{1,n}(|z|)$ *und* $F_{2,n}(|z|)$ *in* $\{z : |z| \leq R\}$ *die eindeutig bestimmten Lösungen des Differentialgleichungssystems (15) sind, die für* $2n - m < 0$ *die Randbedingungen*

$$2F_{1,n}(0) = \overline{\mu(0)}, \ F_{1,n}(R) = F_{2,n}(0) = 0 \tag{44}$$

und für $0 \leq 2n - m$ *die Anfangsbedingungen*

$$2F_{1,n}(0) = \overline{\mu(0)}, \ F_{2,n}(0) = 0 \tag{45}$$

erfüllen.

Anmerkung 2. *Wie der folgende Beweis zeigen wird, folgt im Fall* $\mu(0) = 0$ *für* $2n - m < 0$ *schon aus der Voraussetzung* $\mu(0) = 0$, *dass die Bedingung* $F_{1,n}(0) = 0$ *in (44) erfüllt ist. Im Fall* $\mu(0) \neq 0,\ m = 0$ *folgt für* $2n - m < 0$ *wegen der Voraussetzung* $\mu(0) \neq 0,\ m = 0$ *aus* $F_{2,n}(0) = 0$, *dass* $2F_{1,n}(0) = \overline{\mu(0)}$ *in (44) erfüllt ist.*

Beweis. Die rechte Seite von (42) und (43) werde mit $F(z)$ bezeichnet. Analog zu Satz 6 erhält man, dass $F(z)$ genau dann eine verallgemeinerte Potenz ist, wenn $F_{1,n}$ und $F_{2,n}$ Lösungen von (15) mit den Anfangs- bzw. Randbedingungen (44) und (45) sind. Daher bleibt zu zeigen, dass solche Lösungen $F_{1,n}$ und $F_{2,n}$ existieren. Die Eindeutigkeit folgt dann aus Satz 1.

Zunächst soll der Fall $\mu(0) = 0$ betrachtet werden. Nach Folgerung 2 erhält man aus dem Differentialgleichungssystem (15) die Differentialgleichung (24) für $F_{1,n}$. Die zur Differentialgleichung (24) zugehörigen Anfangs- bzw. Randbedingungen lauten, wegen (44), (45) und (15), d.h. nach

$$F'_{1,n}(x) = \frac{m|\mu(x)|^2 + m - 2n}{(1-|\mu(x)|^2)x} F_{1,n}(x) + \frac{2n\overline{\mu(x)}}{(1-|\mu(x)|^2)x} F_{2,n}(x) + \frac{n\overline{\mu(x)}}{(1-|\mu(x)|^2)x} \tag{46}$$

und daher, wenn man x gegen Null streben lässt, wegen

$$F'_{1,n}(0) = (m-2n)F'_{1,n}(0) + n\overline{\mu'(0)}, \tag{47}$$

für $0 \le 2n - m$

$$F_{1,n}(0) = 0, \quad F'_{1,n}(0) = \frac{n\overline{\mu'(0)}}{1-m+2n}$$

und für $2n - m < -1$

$$F_{1,n}(0) = 0, \quad F'_{1,n}(0) = \frac{n\overline{\mu'(0)}}{1-m+2n}, \quad F_{1,n}(R) = 0.$$

Für $2n - m = -1$ erhält man die Randbedingungen

$$F_{1,n}(0) = 0, \quad F_{1,n}(R) = 0,$$

wobei nur für $\mu'(0) = 0$ (47) erfüllbar ist.

Aus der Differentialgleichung (24) erhält man für die Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ aus Satz 7

$$\begin{aligned} p(x) =& \frac{1}{(1-|\mu(x)|^2)\overline{\mu(x)}} \Big(-(|\mu(x)|^2)' x \overline{\mu(x)} + (1-m+2n)\overline{\mu(x)} \\ & -(1+m+2n)\overline{\mu(x)}|\mu(x)|^2 - (1-|\mu(x)|^2) x \overline{\mu'(x)} \Big), \end{aligned} \tag{48}$$

$$q(x) = \frac{-2nm\overline{\mu(x)}|\mu(x)|^2 - m(|\mu(x)|^2)' x \overline{\mu(x)} + (m-2n+m|\mu(x)|^2)\overline{\mu'(x)}x}{(1-|\mu(x)|^2)\overline{\mu(x)}}.$$

Damit ergeben sich $p(0) = 1 - m + 2n - d$ und $q(0) = (m-2n)d$, wobei d die Ordnung der Nullstelle von $\mu(x)$ sei, und damit für die charakteristische Gleichung (39)

$$f(z) = z^2 + (2n - m - d)z + (m-2n)d = 0 \tag{49}$$

mit den Nullstellen $z_a = -2n+m$ und $z_b = d$. Nach Satz 7 erhält man dann zwei linear unabhängige Lösungen y_1 und y_2 mit

$$y_1(x) = O(x^{max(d,-2n+m)}),$$

$$y_2(x) = \beta O(x^{max(d,-2n+m)}) \ln x + O(x^{min(d,-2n+m)}),$$

wobei $\beta = 0$ sein kann.

Dann ergibt sich für $0 \le 2n - m$

$$F_{1,n}(x) = c_{1,n} y_1(x) = O(x^d),$$

wobei die Konstante $c_{1,n}$ sich aus den Anfangsbedingungen ergibt.

Für $2n - m = -1$ erhält man unter der zusätzlich notwendigen Voraussetzung $\mu'(0) = 0$

$$F_{1,n}(x) = c_{1,n} y_1(x) + d_{1,n} y_2(x) = O(x),$$

wobei sich die Konstanten $c_{1,n}$ und $d_{1,n}$ aus den Randbedingungen ergeben.

Für $2n - m < -1$ erhält man

$$F_{1,n}(x) = c_{1,n} y_1(x) + d_{1,n} y_2(x)$$

und $F_{1,n}$ würde nur dann nicht die Randbedingungen erfüllen, falls $d = 1$ und somit $y_1'(0) = 0 \neq \frac{n\overline{\mu'(0)}}{1-m+2n}$ und $y_1(R) = 0$ und $y_2(R) \neq 0$ wären. Es gilt aber $y_1(R) \neq 0$. Denn angenommen für $F_{1,n} := y_1$ (also mit $F_{1,n}(0) = 0$, $F_{1,n}'(0) = 0$) gilt $F_{1,n}(R) = 0$. Man erhält dann $F_{2,n}(0) = -\frac{1}{2}$ aus (46). Substituiert man $G_{2,n}(x) = F_{2,n}(x) + \frac{1}{2}$ und $G_{1,n}(x) = F_{1,n}(x)$, so erhält man für $G_{1,n}$ und $G_{2,n}$ das homogene System (22) mit

$$G_{1,n}(0) = G_{1,n}(R) = G_{2,n}(0) = 0. \tag{50}$$

Definiert man

$$h(z) := 2 \begin{cases} \overline{c}\frac{|z|^{2n-m}}{z^{n-m}}\overline{G_{1,n}(|z|)} + cG_{2,n}(|z|)z^n & : \quad |z| \le R, \\ cG_{2,n}(R)z^n & : \quad |z| \ge R, \end{cases}$$

so folgt analog wie im Beweis zu Satz 6 (dort für F_0), dass h dann (ν, μ)-Lösung ist, wenn $G_{1,n}$ und $G_{2,n}$ (22) und (50) erfüllen.

Nun hat die (ν, μ)-Lösung h nach dem Darstellungstheorem die Gestalt $h(z) = G(\chi(z))$ mit einer quasikonformen Abbildung χ von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}$ und einer in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ analytischen Funktion G.

Wäre $G_{2,n}(R) = 0$, so würde nach dem Darstellungstheorem $h(z) \equiv 0$ und damit (wegen der speziellen Gestalt von h) $G_{1,n}(|z|) = G_{2,n}(|z|) \equiv 0$ im Widerspruch zur Annahme folgen.

Ist nun $G_{2,n}(R) \neq 0$, so besitzt h in Unendlich einen Punkt der Ordnung $-n$ und im Nullpunkt, da $G_{1,n}(x) = O(x^{m-2n})$ mit $m - 2n > 1$ und nach Bedingung (46) $G_{2,n}(x) = O(x^{m-2n-1})$ mit $m - 2n - 1 \ge 1$ für x gegen Null gelten, mindestens einen Punkt der Ordnung $n + 1$, was nicht möglich ist. Daher folgt wiederum ein Widerspruch zur Annahme, d.h. auch für $2n - m < -1$ sind die Randbedingungen erfüllbar.

Nun soll der Fall $\mu(0) \neq 0$ untersucht werden. Nach (36) und (37) ist nur der Fall $m = 0$ zu betrachten.

Man erhält aus (48)

$$p(0) = 1 + 2n, \qquad q(0) = 0$$

und damit für die charakteristische Gleichung (39)

$$f(z) = z^2 + 2nz = 0$$

mit den Nullstellen

$$z_a = 0, \qquad z_b = -2n.$$

Nach Satz 7 erhält man dann zwei linear unabhängige Lösungen y_1 und y_2 mit

$$y_1(x) = O\left(x^{max(0,-2n)}\right),$$
$$y_2(x) = \beta O\left(x^{max(0,-2n)}\right) \ln x + O\left(x^{min(0,-2n)}\right),$$

wobei $\beta = 0$ sein kann. Nach $2F_{1,n}(0) = \overline{\mu(0)}$ aus (45) ergibt sich für $0 < n$

$$F_{1,n}(x) = c_{1,n} y_1(x)$$

mit einer gewissen Konstanten $c_{1,n}$.

Nach $2F_{1,n}(0) = \overline{\mu(0)}$ aus (44) erhält man für $n < 0$

$$F_{1,n}(x) = c_{1,n} y_1(x) + d_{1,n} y_2(x),$$

und $F_{1,n}$ würde nur dann nicht die Bedingung $F_{1,n}(R) = 0$ erfüllen, falls $y_1(R) = 0$ und $y_2(R) \neq 0$ wären. Analog zum obigen Fall erhält man, dass das nicht möglich ist, d.h. die Bedingung $F_{1,n}(R) = 0$ ist ebenfalls erfüllbar.

Nun gilt nach (46)

$$F_{2,n}(x) = \frac{(1 - |\mu(x)|^2)x}{2n\overline{\mu(x)}} F'_{1,n}(x) + \frac{1}{\overline{\mu(x)}} F_{1,n}(x) - \frac{1}{2}, \tag{51}$$

d.h. man erhält aus $2F_{1,n}(0) = \overline{\mu(0)}$ auch

$$F_{2,n}(0) = 0$$

und daher existieren auch im Fall $\mu(0) \neq 0$, $m = 0$ verallgemeinerte Potenzen mit $n \neq 0$ der Gestalt (42) bzw. (43).

□

ANMERKUNG 3. *Der Satz 8 besagt u.a., dass man für*

$$\mu(z) = \begin{cases} z^m \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j |z|^{j-m} & : \ 0 \leq |z| \leq R, \\ 0 & : \ sonst, \end{cases}$$

mit $|\mu(z)| < 1$, $m \neq 0$ und $\mu(0) \neq 0$ keine verallgemeinerte n-te Potenzen (mit $n \neq 0$) der Gestalt (42) bzw. (43), wobei die Funktionen $F_{1,n}$ und $F_{2,n}$ Lösungen des Differentialgleichungssystems (15) sind, findet. Der Koeffizient μ erfüllt im Punkt $z_0 = 0$ aber auch weder die Bojarski-Bedingung, welche hinreichend für die Existenz einer asymptotischen Entwicklung ist, noch die schwächeren Voraussetzungen des Satzes von Teichmüller-Wittich und auch nicht die noch schwächere (L_2)-Bedingung, d.h. es gilt nicht $\frac{\mu(z)-\varrho}{z} \in L_2$ für jedes $\varrho \in \mathbb{C}$.

Zum *Beweis* der Behauptung ist zu zeigen, dass $\frac{\mu(z)-\varrho}{z} \notin L_2$ für jedes $\varrho \in \mathbb{C}$ gilt, womit dann auch nicht die Voraussetzungen des Satzes von Teichmüller-Wittich und die Bojarski-Bedingung erfüllt sein können. Zunächst sieht man leicht, da $\frac{z^m \sum_{j=1}^{\infty} a_j |z|^{j-m}}{z} \in L_2$ gilt, dass es ausreichend ist, $\frac{\frac{a_0 z^m}{|z|^m} - \varrho}{z} \notin L_2$ zu beweisen. Für $|\varrho| > |a_0|$ und $|\varrho| < |a_0|$ folgt das unmittelbar. Für $|\varrho| = |a_0|$ folgt, wenn man $\gamma \in [0, 2\pi)$ so bestimmt, dass $\varrho = a_0 e^{i\gamma}$ gilt,

$$\lim_{\delta \to +0} \iint\limits_{\delta < |z| < R} \left| \frac{\frac{a_0 z^m}{|z|^m} - a_0 e^{i\gamma}}{z} \right|^2 d\sigma_z = \lim_{\delta \to +0} |a_0|^2 \int_\delta^R \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \left| e^{im\phi} - e^{i\gamma} \right|^2 \, d\phi dr$$

$$= \lim_{\delta \to +0} 4|a_0|^2 \int_\delta^R \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{m\phi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) \, d\phi dr = \lim_{\delta \to +0} 4\pi |a_0|^2 \int_\delta^R \frac{1}{r} \, dr$$

$$= \infty,$$

also $\frac{\frac{a_0 z^m}{|z|^m} - \varrho}{z} \notin L_2$. Somit ist dann $\frac{\mu(z)-\varrho}{z} \notin L_2$ letztlich für jedes $\varrho \in \mathbb{C}$, d.h. es folgt obige Behauptung.

2.3. Beispiele für rotationssymmetrische Systeme.

FOLGERUNG 4 ([**9**], 6.2). *Es sei*

$$\mu(z) = \begin{cases} K z^m |z|^p & : \quad 0 \leq |z| \leq R, \\ 0 & : \quad \textit{sonst}, \end{cases}$$

mit $K \in \mathbb{C}$, $m, p \in \mathbb{Z}$, $m + p > 0$ und $\frac{2n+p}{2(m+p)} \notin \mathbb{Z}$.
Dann erfüllt die Funktion $a(x)$ aus (27) mit $t = |K|^2 x^{2(m+p)}$ die hypergeometrische Differentialgleichung

$$(t-1)\, t\, \ddot{a}\, (t) + \dot{a}\, (t) \left(t \left(\frac{2m+2p+2n}{2(m+p)} + \frac{2m+p}{2(m+p)} + 1 \right) - \frac{2n+p}{2(m+p)} \right)$$
$$+ a(t) \frac{(2m+2p+2n)(2m+p)}{(2(m+p))^2} = 0 \tag{52}$$

und $b(x)$

$$(t-1)\,t\,\ddot{b}\,(t)+\dot{b}\,(t)\left(t\left(\frac{4m+2p-2n}{2(m+p)}+\frac{2m+p}{2(m+p)}+1\right)-\frac{2m+p-2n}{2(m+p)}\right)$$
$$+\,b(t)\frac{(4m+2p-2n)(2m+p)}{(2(m+p))^2}=0, \tag{53}$$

und die Lösungen sind für $0 \leq 2n-m$ *gegeben durch*

$$\begin{aligned}
a(x) &= F\left(1+\frac{2n}{2(m+p)},\frac{2m+p}{2(m+p)},\frac{p+2n}{2(m+p)},|K|^2x^{2(m+p)}\right),\\
b(x) &= \frac{(2m+p)\overline{K}}{p+2n}x^{p+2n}\\
&\qquad\times F\left(1+\frac{2n}{2(m+p)},1+\frac{2m+p}{2(m+p)},1+\frac{p+2n}{2(m+p)},|K|^2x^{2(m+p)}\right)
\end{aligned}$$

und für $2n-m<0$ *durch*

$$\begin{aligned}
a(x) &= F\left(1+\frac{2n}{2(m+p)},\frac{2m+p}{2(m+p)},\frac{p+2n}{2(m+p)},|K|^2x^{2(m+p)}\right)\\
&\quad+(2m+p)Kdx^{2m+p-2n}\\
&\quad\times F\left(1+\frac{2m-2n}{2(m+p)},1+\frac{2m+p}{2(m+p)},2-\frac{p+2n}{2(m+p)},|K|^2x^{2(m+p)}\right),\\
b(x) &= d(2m+p-2n)F\left(1+\frac{2m-2n}{2(m+p)},\frac{2m+p}{2(m+p)},\frac{2m+p-2n}{2(m+p)},|K|^2x^{2(m+p)}\right)\\
&\quad+\frac{2m+p}{2n+p}\overline{K}x^{p+2n}\\
&\quad\times F\left(1+\frac{2n}{2(m+p)},1+\frac{2m+p}{2(m+p)},1+\frac{p+2n}{2(m+p)},|K|^2x^{2(m+p)}\right),
\end{aligned}$$

wobei $d=R^{2n+p}\overline{K}\frac{d_1}{d_2}$ *ist mit*

$$\begin{aligned}
d_1 &= F\left(1+\frac{2n}{2(m+p)},\frac{2m+p}{2(m+p)},\frac{p+2n}{2(m+p)},|K|^2R^{2(m+p)}\right)\\
&\quad-\frac{2m+p}{2n+p}F\left(1+\frac{2n}{2(m+p)},1+\frac{2m+p}{2(m+p)},1+\frac{p+2n}{2(m+p)},|K|^2R^{2(m+p)}\right),\\
d_2 &= (2m+p-2n)F\left(1+\frac{2m-2n}{2(m+p)},\frac{2m+p}{2(m+p)},\frac{2m+p-2n}{2(m+p)},|K|^2R^{2(m+p)}\right)\\
&\quad-(2m+p)R^{2m+2p}|K|^2\\
&\quad\times F\left(1+\frac{2m-2n}{2(m+p)},1+\frac{2m+p}{2(m+p)},2-\frac{p+2n}{2(m+p)},|K|^2R^{2(m+p)}\right).
\end{aligned}$$

Beweis. Aus (28) erhält man nach elementarer Rechnung mit Hilfe der Substitution $t=|K|^2x^{2(m+p)}$ für $a(t)$ die Differentialgleichung (52), die die Gestalt

$$(t-1)t\ddot{a}(t)+((\alpha+\beta+1)t-\gamma)\dot{a}(t)+\alpha\beta a(t)=0$$

mit

$$\alpha = \frac{2m+2p+2n}{2(m+p)}, \quad \beta = \frac{2m+p}{2(m+p)} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{2n+p}{2(m+p)}$$

besitzt, d.h. man erhält eine hypergeometrische Differentialgleichung. Ebenso ergibt sich für $b(t)$ die hypergeometrische Differentialgleichung (53) mit

$$\alpha = 1 + \frac{2m-2n}{2(m+p)}, \quad \beta = \frac{2m+p}{2(m+p)} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{2m+p-2n}{2(m+p)},$$

woraus sich jeweils dann die Lösungen unmittelbar ergeben.
□

Setzt man in Folgerung 4 $m = 0$ und $R = 1$, so erhält man einen Spezialfall, der schon in [**4**] auftritt.

Die in der nächsten Folgerung beschriebenen verallgemeinerten Potenzen sind insbesondere harmonische Abbildungen in einem Kreisgebiet.

Folgerung 5. *Es sei*

$$\mu(z) = \begin{cases} K\overline{z}^m & : \ |z| \leq R, \\ 0 & : \ \textit{sonst}, \end{cases}$$

mit $K \in \mathbb{C}$ *und* $m \in \mathbb{N}$.

Dann sind die verallgemeinerten Potenzen für $2n + m < 0$ *und* $n \neq -m$ *gegeben durch*

$$[cz^n]_\mu = cz^n + \begin{cases} \frac{1}{z^{n+m}} \frac{n\overline{c}K}{n+m}(|z|^{2(n+m)} - R^{2(n+m)}) - \frac{c|K|^2 R^{2(n+m)}}{\overline{z}^n} & : \ |z| < R, \\ -c|K|^2 R^{2m} z^n & : \ |z| \geq R \end{cases}$$

und für $0 \leq 2n + m$ *durch*

$$[cz^n]_\mu = cz^n + \begin{cases} \frac{n\overline{c}K}{n+m} \overline{z}^{n+m} & : \ |z| < R, \\ \frac{n\overline{c}K}{n+m} \frac{R^{2(n+m)}}{z^{n+m}} & : \ |z| \geq R. \end{cases}$$

Beweis. Nach Folgerung 4 ist die Lösung von (28) für $2n + m < 0$ gegeben durch

$$a(x) = 1, \qquad b(x) = \overline{K} R^{2n+2m}$$

und für $0 \leq 2n + m$ durch

$$a(x) = 1, \qquad b(x) = 0,$$

womit sich unmittelbar die verallgemeinerten Potenzen ergeben.
□

Anmerkung 4. *In Folgerung 5 wurde für den Fall* $n \neq -m$ *keine verallgemeinerte Potenz angegeben. Dieser Fall wird bereits in Anmerkung 1 behandelt.*

Folgerung 6. *Es sei*

$$\mu(z) = \begin{cases} Kz^m & : \quad |z| \leq R, \\ 0 & : \quad sonst, \end{cases}$$

mit $K \in \mathbb{C},\ \ m \in \mathbb{N}$.

Dann sind die verallgemeinerten Potenzen für $2n - m < 0$ *gegeben durch*

$$[cz^n]_\mu = cz^n + \begin{cases} \frac{1}{z^{n-m}} \frac{\overline{c}K(|z|^{2n} - R^{2n})}{1-|K|^2|z|^{2m}} + \frac{cz^n|K]^2|z|^{2m}\left(1 - \frac{R^{2n}}{|z|^{2n}}\right)}{1-|K|^2|z|^{2m}} & : \quad |z| \leq R, \\ 0 & : \quad |z| < R \end{cases}$$

und für $0 \leq 2n - m$ *durch*

$$[cz^n]_\mu = cz^n + \begin{cases} \frac{1}{z^{n-m}} \frac{\overline{c}K|z|^{2n}}{1-|K|^2|z|^{2m}} + \frac{cz^n|K|^2|z|^{2m}}{1-|K|^2|z|^{2m}} & : \quad |z| < R, \\ \frac{1}{z^{n-m}} \frac{\overline{c}KR^{2n}}{1-|K|^2R^{2m}} + \frac{cz^n|K|^2R^{2m}}{1-|K|^2R^{2m}} & : \quad |z| \geq R. \end{cases}$$

Beweis. Nach Folgerung 4 und den folgenden Beziehungen für hypergeometrische Funktionen, nämlich

$$F(1+\gamma, 1, \gamma, z) = \frac{1 - z + \frac{z}{\gamma}}{(1-z)^2}$$

und

$$F(-m, \beta, \beta, z) = (1-z)^m,$$

ist die Lösung von (28) für $2n - m < 0$ und $n \neq 0$ gegeben durch

$$\begin{aligned} a(x) =& \frac{1 - |K|^2x^{2m} + \frac{m|K|^2x^{2m}}{n}}{(1-|K|^2x^{2m})^2} - \frac{R^{2n}|K|^2mx^{2m-2n}}{n\left(1-|K|^2x^{2m}\right)^2}, \\ b(x) =& - R^{2n}\overline{K}\frac{(m-n)\left(1 - |K|^2x^{2m} + \frac{|K|^2x^{2m}}{1-\frac{n}{m}}\right)}{n(1-|K|^2x^{2m})^2} + \frac{m\overline{K}x^{2n}}{n\left(1-|K|^2x^{2m}\right)^2} \end{aligned}$$

und für $0 \leq 2n - m$ durch

$$a(x) = \frac{1 - |K|^2x^{2m} + \frac{m|K|^2x^{2m}}{n}}{(1-|K|^2x^{2m})^2}, \qquad b(x) = \frac{m\overline{K}x^{2n}}{n\left(1-|K|^2x^{2m}\right)^2},$$

womit sich unmittelbar die verallgemeinerten Potenzen ergeben.
□

Die verallgemeinerten Potenzen aus den Folgerungen 5 und 6 werden auch mittels anderer Methoden in [**13**], 4.4 konstruiert.

2.4. Konstruktion von verallgemeinerten Potenzen mittels Reihendarstellung. Folgend soll noch eine weitere Variante zur Bestimmung von verallgemeinerten Potenzen dargelegt werden. Dabei werden die verallgemeinerten Potenzen mittels einer Reihe dargestellt.

Satz 9 ([**9**], Satz 8). *Es seien $\nu(z) \equiv 0$ in $\mathbb{C}$,*

$$\mu(z) = \begin{cases} f(|z|) & : r \leq |z| \leq R, \\ 0 & : sonst, \end{cases}$$

$0 < r < R < \infty$, $\mu \in C^1(\{z : r \leq |z| \leq R\})$, $\mu \in C(\mathbb{C})$ (d.h. also insbesondere $\mu(r) = \mu(R) = 0$) und $K := \int\limits_r^R |\mu'(x)|dx < \frac{1}{2}$ (also insbesondere $|\mu(z)| \leq K < \frac{1}{2}$).
Des Weiteren seien für $v \in C^1(\{z : r \leq |z| \leq R\})$, $n \in \mathbb{Z}$

$$K_n(v)(x) := \begin{cases} 0 & : x \leq r, \\ \int\limits_r^x \frac{1}{\xi^{2n}} \left(\overline{\mu(\xi)v(\xi)}\right)' d\xi & : r \leq x \leq R, \\ \int\limits_r^R \frac{1}{\xi^{2n}} \left(\overline{\mu(\xi)v(\xi)}\right)' d\xi & : R \leq x \end{cases}$$

und für $n \geq 0$

$$L_n(v)(x) := \begin{cases} 0 & : x \leq r, \\ \int\limits_r^x \xi^{2n} \left(\overline{\mu(\xi)v(\xi)}\right)' d\xi & : r \leq x \leq R, \\ \int\limits_r^R \xi^{2n} \left(\overline{\mu(\xi)v(\xi)}\right)' d\xi & : R \leq x \end{cases}$$

und für $n < 0$

$$L_n(v)(x) := \begin{cases} -\int\limits_r^R \xi^{2n} \left(\overline{\mu(\xi)v(\xi)}\right)' d\xi & : x \leq r, \\ -\int\limits_x^R \xi^{2n} \left(\overline{\mu(\xi)v(\xi)}\right)' d\xi & : r \leq x \leq R, \\ 0 & : R \leq x \end{cases}$$

und damit

$$(L_n K_n)^j(v)(x) = \begin{cases} v(x) & : \quad j = 0, \\ L_n(K_n((L_n K_n)^{j-1}(v)))(x) & : \quad j > 0 \end{cases}$$

definiert. Dann erhält man für $n \geq 0$ mit $v(\xi) := \int\limits_r^\xi \overline{\mu'(s)} s^{2n} ds$ und $\tau(x) := \mu(x)x^{2n-1}$

$$[cz^n]_\mu = cz^n \tag{54}$$

$$+ 2n \begin{cases} 0 & : 0 \le |z| \le r, \\ \frac{\overline{c}}{z^n} \int\limits_r^{|z|} \tau(x)\ dx + \frac{\overline{c}}{z^n} \sum\limits_{j=0}^{\infty} \int\limits_r^{|z|} \tau(x) K_n \left((L_n K_n)^j (v) \right)(x)\ dx & \\ +cz^n \sum\limits_{j=0}^{\infty} \int\limits_r^{|z|} \frac{\mu(x)}{x^{2n+1}} (L_n K_n)^j (v)(x)\ dx & : r \le |z| \le R, \\ \frac{\overline{c}}{z^n} \int\limits_r^{R} \tau(x)\ dx + \frac{\overline{c}}{z^n} \sum\limits_{j=0}^{\infty} \int\limits_r^{R} \tau(x) K_n \left((L_n K_n)^j (v) \right)(x)\ dx & \\ +cz^n \sum\limits_{j=0}^{\infty} \int\limits_r^{R} \frac{\mu(x)}{x^{2n+1}} (L_n K_n)^j (v)(x)\ dx & : R \le |z| \end{cases}$$

und für $n < 0$ mit $v(\xi) = -\int\limits_\xi^R \overline{\mu'(s)} s^{2n} ds$

$$[cz^n]_\mu = cz^n \tag{55}$$

$$+ 2n \begin{cases} -\frac{\overline{c}}{z^n} \int\limits_r^{R} \tau(x)\ dx - \frac{\overline{c}}{z^n} \sum\limits_{j=0}^{\infty} \int\limits_r^{R} \tau(x) K_n \left((L_n K_n)^j (v) \right)(x)\ dx & : 0 \le |z| < r, \\ -\frac{\overline{c}}{z^n} \int\limits_{|z|}^{R} \tau(x)\ dx - \frac{\overline{c}}{z^n} \sum\limits_{j=0}^{\infty} \int\limits_{|z|}^{R} \tau(x) K_n \left((L_n K_n)^j (v) \right)(x)\ dx & \\ +cz^n \sum\limits_{j=0}^{\infty} \int\limits_r^{|z|} \frac{\mu(x)}{x^{2n+1}} (L_n K_n)^j (v)(x)\ dx & : r \le |z| \le R, \\ cz^n \sum\limits_{j=0}^{\infty} \int\limits_r^{R} \frac{\mu(x)}{x^{2n+1}} (L_n K_n)^j (v)(x)\ dx & : R \le |z|. \end{cases}$$

Außerdem gelten noch die Abschätzungen

$$|[cz^n]_\mu - cz^n| \le |cz^n| \frac{K(1 + K + 6K^2)}{1 - 2K} \tag{56}$$

und daher

$$|[cz^n]_\mu| \le |cz^n| \frac{1 - K + K^2 + 6K^3}{1 - 2K}. \tag{57}$$

Beweis. Zunächst soll die Konvergenz der Reihen für $n \ge 0$ gezeigt werden. Es gilt für $r \le |z| \le R$

$$\left| (L_n K_n)^0 (v) (|z|) \right| = \left| \int\limits_r^{|z|} \overline{\mu'(x)} x^{2n}\ dx \right| \le |z|^{2n} K$$

und

$$\left| K_n \left((L_n K_n)^0 (v) \right) (|z|) \right| = \left| \int\limits_r^{|z|} \frac{1}{x^{2n}} \left(\overline{\mu(x)} \int\limits_r^x \mu'(s) s^{2n} ds \right)' dx \right|$$

$$\leq \left| \int_r^{|z|} \frac{1}{x^{2n}} \left(\overline{\mu'(x)} \int_r^x \mu'(s) s^{2n} ds + \overline{\mu(x)} \mu'(x) x^{2n} \right) dx \right| \leq 2K^2.$$

Für $m \in \mathbb{N}$ beliebig und $r \leq |z| \leq R$ erhält man

$$\begin{aligned} |(L_n K_n)^m (v)(|z|)| &\leq |z|^{2n} K (2K)^{2m} \text{ und} \\ |K_n \left((L_n K_n)^m (v) \right) (|z|)| &\leq K (2K)^{2m+1}, \end{aligned} \tag{58}$$

denn unter der Annahme, dass (58) gilt, folgt mittels vollständiger Induktion

$$\left| (L_n K_n)^{m+1} (v) (|z|) \right| = \left| \int_r^{|z|} x^{2n} \left(\overline{\mu(x) K_n \left((L_n K_n)^m (v) \right) (x)} \right)' dx \right|$$

$$\leq \left| \int_r^{|z|} x^{2n} \left(\overline{\mu'(x) K_n \left((L_n K_n)^m (v) \right) (x)} + \frac{\overline{\mu(x)}}{x^{2n}} \left(\mu(x) (L_n K_n)^m (v) (x) \right)' \right) dx \right|$$

$$\leq \left| \int_r^{|z|} x^{2n} \overline{\mu'(x) K_n \left((L_n K_n)^m (v) \right) (x)} \; dx \right| + \left| \overline{\mu(|z|)} \mu(|z|) (L_n K_n)^m (v) (|z|) \right|$$

$$+ \left| \int_r^{|z|} \overline{\mu'(x)} \mu(x) (L_n K_n)^m (v) (x) \; dx \right|$$

$$\leq |z|^{2n} \left(K^2 (2K)^{2m+1} + K^3 (2K)^{2m} + K^3 (2K)^{2m} \right) = |z|^{2n} K (2K)^{2(m+1)}$$

und

$$\left| K_n \left((L_n K_n)^{m+1} (v) \right) (|z|) \right| = \left| \int_r^{|z|} \frac{1}{x^{2n}} \left(\overline{\mu(x) (L_n K_n)^{m+1} (v) (x)} \right)' dx \right|$$

$$\leq \left| \int_r^{|z|} \frac{\left(\overline{\mu'(x) (L_n K_n)^{m+1} (v) (x)} + \overline{\mu(x)} x^{2n} \left(\mu(x) K_n \left((L_n K_n)^m (v) \right) (x) \right)' \right)}{x^{2n}} dx \right|$$

$$\leq \left| \int_r^{|z|} \frac{1}{x^{2n}} \overline{\mu'(x) (L_n K_n)^{m+1} (v) (x)} \; dx \right| + \left| \overline{\mu(|z|)} \mu(|z|) K_n \left((L_n K_n)^m (v) \right) (|z|) \right|$$

$$+ \left| \int_r^{|z|} \overline{\mu'(x)} \mu(x) K_n \left((L_n K_n)^m (v) \right) (x) \; dx \right|$$

$$\leq K^2 (2K)^{2m+2} + K^3 (2K)^{2m+1} + K^3 (2K)^{2m+1} = K (2K)^{2(m+1)+1}.$$

Analog erhält man für $n < 0$ (58). Bezeichnet man die rechte Seite von (54) mit $F(z)$, so ergibt sich für $r \le |z| \le R$ und $n \ge 0$

$$\begin{aligned}
&|F(z)| \\
=&\left| cz^n + \frac{2n\bar{c}}{z^n}\int_r^{|z|} \mu(x)x^{2n-1}\, dx + 2ncz^n \sum_{j=0}^{\infty}\int_r^{|z|} \frac{\mu(x)(L_nK_n)^j\,(v)\,(x)}{x^{2n+1}}\, dx \right.\\
&\left. + 2n\bar{c}\frac{1}{z^n}\sum_{j=0}^{\infty}\int_r^{|z|} \mu(x)x^{2n-1}K_n\left((L_nK_n)^j\,(v)\right)(x)dx\right| \\
\le& |c||z|^n + |c|K|z|^n \\
&+ \left| cz^n \sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{\mu(|z|)(L_nK_n)^j\,(v)\,(|z|)}{|z|^{2n}} + \int_r^{|z|} \frac{\left(\mu(x)(L_nK_n)^j\,(v)\,(x)\right)'}{x^{2n}}\, dx\right)\right| \\
&+ \left| \frac{c}{z^n}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\mu(|z|)|z|^{2n}K_n((L_nK_n)^j(v))(|z|)\right.\right. \\
&\left.\left. - \int_r^{|z|} x^{2n}\left(\mu(x)K_n\left((L_nK_n)^j(v)\right)(x)\right)'\, dx\right)\right| \\
\le& |c||z|^n + |c|K|z|^n + |c||z|^n\sum_{j=0}^{\infty}\left(K^2(2K)^{2j} + K(2K)^{2j+1}\right. \\
&\left. + K^2(2K)^{2j+1} + K(2K)^{2j+2}\right) \\
=& |c||z|^n\frac{1-K+K^2+6K^3}{1-2K},
\end{aligned}$$

da nach Voraussetzung $|K| < \frac{1}{2}$ gilt. Analog erhält man für $n < 0$ diese Abschätzung, d.h. die Reihen konvergieren und $F(z)$ ist wohldefiniert und damit ist auch (57) gezeigt. Die Ungleichung (56) folgt analog.

Die Funktion $F(z)$ erfüllt auch die Differentialgleichung

$$F_{\overline{z}}(z) = \mu(z)\overline{F_z}(z),$$

was man mittels elementarer Rechnung leicht überprüft.

Die Funktion $F(z)$ besitzt auch die in Satz 1 geforderte asymptotische Entwicklung. Nun existiert nach Satz 1 genau eine Lösung mit diesen Eigenschaften, d.h. die Funktion $F(z)$ ist die gesuchte verallgemeinerte Potenz.

□

Anmerkung 5. *In* [**8**] *wird gezeigt, dass die verallgemeinerte Potenz* $[\lambda(z-z_0)^n]_{\nu,\mu}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *unter gewissen Bedingungen die Ungleichung*

$$\kappa^{-|n|}\,|\lambda(z-z_0)^n| \leq |[\lambda(z-z_0)^n]_{\nu,\mu}| \leq \kappa^{|n|}\,|\lambda(z-z_0)^n|$$

erfüllt, wobei κ *eine nur von den Koeffizienten* ν *und* μ *abhängige Konstante ist. Für das spezielle Beispiel aus Satz 9 wurde anstelle von* $\kappa^{|n|}$ *mit* $\frac{1-K+K^2+6K^3}{1-2K}$ *eine von* n *unabhängige Konstante gefunden.*

3. Nichtgleichmäßig elliptische Systeme

In diesem Abschnitt soll das Verhalten der Lösungen des Differentialgleichungssystems (15) mit den Anfangs- bzw. Randbedingungen (16), (17) untersucht werden, falls $\nu(z) \equiv 0$ in $\mathbb{C}$, $m = 0$ und

$$\mu(z) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j(|z|-x_0)^j & : \quad r \leq |z| \leq R, \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{59}$$

mit $0 < r < R < \infty$, $x_0 \in (r,R)$ erfüllen und außerdem in (2) die Bedingung $\|\mu\|_{L_\infty} \leq k < 1$ fallen gelassen wird und statt dessen

$$|\mu(x_0)| = 1, \qquad |\mu(x)| < 1 \text{ sonst} \tag{60}$$

gilt. Aus (59) ergibt sich auch für $1-|\mu(x)|^2$

$$1-|\mu(x)|^2 = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j(x-x_0)^j & : \quad r \leq x \leq R, \\ 1 & : \quad \text{sonst,} \end{cases} \tag{61}$$

mit geeigneten b_j, $j = 0, 1, \ldots$

Verallgemeinerte Potenzen werden in Satz 1 nur für gleichmäßig elliptische (ν,μ)-Systeme definiert. Wenn nun die Koeffizienten ν und μ die oben genannten Bedingungen erfüllen, d.h. im nichtgleichmäßigen elliptischen Fall, erhält man eine Funktion $w(z)$, welche entsteht, indem man die Lösungen $F_{1,n}(|z|)$ und $F_{2,n}(|z|)$ des Differentialgleichungssystems (15) mit den Anfangs- bzw. Randbedingungen (16), (17) (falls überhaupt Lösungen existieren) in (13) bzw. (14) einsetzt, die die Eigenschaften

(I) $w(z)$ hat im Nullpunkt eine asymptotische Entwicklung

$$w(z) = c\,(z+\mathfrak{b}\overline{z})^n - b\overline{c}\left(\overline{z}+\overline{\mathfrak{b}}z\right)^n + O\left(|z|^{n+\alpha}\right),$$

mit $b, \mathfrak{b}$ und $\alpha > 0$ wie in Satz 1,

(II) der Punkt ∞ ist ein Punkt der Ordnung $-n$ von $w(z)$, besitzt. Die Funktion $w(z)$ erfüllt in den Gebieten $\{z : |z| < x_0\}$ und $\{z : |z| > x_0\}$ die Differentialgleichung (4). Es soll nun untersucht werden, ob solche Lösungen $F_{1,n}(|z|)$, $F_{2,n}(|z|)$, die fortan *zulässige* Lösungen heißen sollen, existieren.

Es wird noch der folgende Satz benötigt.

SATZ 10 ([**3**],IV.12.1). *Es sei die gewöhnliche Differentialgleichung d-ter Ordnung*

$$u^{(d)} + p_{d-1}(x)u^{(d-1)} + \cdots + p_1(x)u' + p_0(x)u = 0$$

gegeben, wobei die Koeffizientenfunktionen p_j, $j = 0, 1, \ldots, d-1$ analytisch in $\{x : 0 < |x - x_0| < R\}$ seien. Der Punkt x_0 ist ein regulär singulärer Punkt der Differentialgleichung genau dann, wenn $(x - x_0)^{d-k}p_k(x)$ analytisch in x_0 für $k = 0, 1, \ldots, d-1$ ist, d.h. wenn $p_{d-k}(x)$ höchstens einen Pol k-ter Ordnung in x_0 hat.

ANMERKUNG 6. *Der Koeffizient μ erfülle die Bedingungen (59) und (60).*

Dann ist der Punkt x_0 ein regulär singulärer Punkt der Differentialgleichung (24).

Beweis zur Anmerkung. Aus der Differentialgleichung (24) erhält man für die Funktionen $p_1(x)$ und $p_0(x)$ aus Satz 10 (mit $m = 0$)

$$\begin{aligned} p_1(x) = &\frac{1}{(1 - |\mu(x)|^2)x\overline{\mu(x)}} \Big(-(|\mu(x)|^2)' x\overline{\mu(x)} + (1+2n)\overline{\mu(x)} \\ &\qquad - (1+2n)\overline{\mu(x)}|\mu(x)|^2 - (1 - |\mu(x)|^2)x\overline{\mu'(x)} \Big) \\ p_0(x) = &\frac{-2n\overline{\mu'(x)}}{(1 - |\mu(x)|^2)x\overline{\mu(x)}}. \end{aligned}$$

Mit (61) folgt

$$p_1(x) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j j (x - x_0)^{j-1}}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j (x - x_0)^j} + \frac{1+2n}{x} - \frac{\sum\limits_{j=0}^{\infty} \overline{a_j} j (x - x_0)^{j-1}}{\sum\limits_{j=0}^{\infty} \overline{a_j} (x - x_0)^j},$$

d.h. die Funktion p_1 hat im Punkt x_0 höchstens einen Pol 1-ter Ordnung.

Es sei d die Ordnung der Nullstelle der Funktion $\mu(x)-\mu(x_0)$. Somit ergibt sich $1-|\mu(x)|^2 = \sum\limits_{j=d}^{\infty} b_j(x-x_0)^j$. Daher erhält man

$$p_0(x) = -\frac{2n\sum\limits_{j=d}^{\infty}\overline{a_j}j(x-x_0)^{j-1}}{x\sum\limits_{j=d}^{\infty}b_j(x-x_0)^j\sum\limits_{j=0}^{\infty}\overline{a_j}(x-x_0)^j},$$

d.h. die Funktion p_0 hat im Punkt x_0 höchstens einen Pol 1-ter Ordnung. Nach Satz 10 folgt dann die Behauptung.
□

Über das Verhalten der Lösung der Differentialgleichung (24) unter den Bedingungen (59) und (60) im Punkt x_0 gibt der nächste Satz Auskunft.

Satz 11. *Der Koeffizient μ erfülle die Bedingungen (59) und (60) und es sei d die Ordnung der Nullstelle von $\mu(x)-\mu(x_0)$, wobei $d>0$ sei.*

Dann erhält man für die zwei linear unabhängige Lösungen von (24) die Funktionen

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k, \qquad c_0 = 1, \qquad r\le x\le R,$$

und

$$y_2(x) = y_1(x)\ln|x-x_0| + \sum_{k=1}^{\infty} d_k(x-x_0)^k, \qquad d_0 = 1,$$

falls $d=1$;

$$y_2(x) = \beta y_1(x)\ln|x-x_0| + |x-x_0|^{1-d}\sum_{k=0}^{\infty} d_k(x-x_0)^k, \qquad d_0 = 1,$$

falls $d>1$, wobei β Null sein kann.

Beweis. Multipliziert man (24) mit $(x-x_0)^2$, so erhält man mit $m=0$

$$\begin{aligned}
&F_1''(x)(1-|\mu(x)|^2)(x-x_0)^2x^2\overline{\mu(x)}\\
&+F_{1,n}'(x)(x-x_0)^2x\Big(-(|\mu(x)|^2)'x\overline{\mu(x)}+(1+2n)\overline{\mu(x)}\\
&\qquad -(1+2n)\overline{\mu(x)}|\mu(x)|^2-(1-|\mu(x)|^2)x\overline{\mu'(x)}\Big)\\
&-F_{1,n}(x)(x-x_0)^2 2n\overline{\mu'(x)}x = 0.
\end{aligned}$$

Dann ergeben sich für die in Satz 7 eingeführten Funktionen $p(x)$ und $q(x)$

$$\begin{aligned} p(x) = & \frac{x-x_0}{(1-|\mu(x)|^2)x\overline{\mu(x)}}\Big(-(|\mu(x)|^2)'x\overline{\mu(x)} + (1+2n)\overline{\mu(x)} \\ & -(1+2n)\overline{\mu(x)}|\mu(x)|^2 - (1-|\mu(x)|^2)x\overline{\mu'(x)}\Big), \\ q(x) = & -\frac{(x-x_0)^2 2n\overline{\mu'(x)}x}{(1-|\mu(x)|^2)x^2\overline{\mu(x)}}. \end{aligned} \tag{62}$$

Mit (61) erhält man

$$p(x) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j j(x-x_0)^j}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j(x-x_0)^j} + \frac{(1+2n)(x-x_0)}{x} - \frac{\sum\limits_{j=0}^{\infty} \overline{a_j} j(x-x_0)^j}{\sum\limits_{j=0}^{\infty} \overline{a_j}(x-x_0)^j},$$

$$q(x) = -\frac{2n\sum\limits_{j=0}^{\infty} \overline{a_j} j(x-x_0)^{j+1}}{x\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j(x-x_0)^j \sum\limits_{j=0}^{\infty} \overline{a_j}(x-x_0)^j}.$$

Dann erhält man

$$p(x_0) = d, \qquad q(x_0) = 0,$$

und daher lautet die charakteristische Gleichung (39)

$$f(z) = z^2 + (d-1)z = 0,$$

also ergeben sich die Nullstellen

$$z_a = 0, \qquad z_b = 1-d.$$

Mittels Satz 7 folgt dann die Behauptung.

□

Letztendlich erhält man

FOLGERUNG 7. *Es seien die Voraussetzungen des Satzes 11 erfüllt und $d \geq 1$. Im Fall $0 < r < x_0 < R$ und $\mu(r) \neq 0$ existieren für $0 < n$ zulässige Lösungen mit*

$$\begin{aligned} F_{1,n}(x) = & \, c_{1,n}\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k + d_{1,n}\beta\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k \ln|x-x_0| \\ & + d_{1,n}|x-x_0|^{1-d}\sum_{k=0}^{\infty} d_k(x-x_0)^k, \quad c_0 = d_0 = 1,\ r \leq x \leq R, \end{aligned}$$

wobei β Null sein kann und sich sämtliche c_k, d_k und $c_{1,n}, d_{1,n}$ durch Einsetzen in die Differentialgleichung (24) und die Anfangsbedingungen (26) rekursiv bestimmen lassen.

Beweis. Nach Satz 11 erhält man als allgemeine Lösung von (24)

$$F_{1,n}(x) = c_{1,n} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k + d_{1,n}\beta \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k \ln|x-x_0|$$

$$+ d_{1,n}|x-x_0|^{1-d} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (x-x_0)^k, \quad c_0 = d_0 = 1,\ r \leq x \leq R,$$

wobei $\beta = 0$ sein kann. Setzt man für $0 < n$ die Anfangsbedingung $F_{1,n}(r) = 0$ aus (26) ein, so ergibt sich, falls $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (r-x_0)^k \neq 0$ gilt,

$$F_{1,n}(x) = -\, d_{1,n} \left(\beta \ln|r-x_0| + |r-x_0|^{1-d} \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k (r-x_0)^k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (r-x_0)^k} \right) \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k$$

$$+ d_{1,n}\beta \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k \ln|x-x_0|$$

$$+ d_{1,n}|x-x_0|^{1-d} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (x-x_0)^k, \qquad c_0 = d_0 = 1, \qquad r \leq x \leq R.$$

Nun gilt $F'_{1,n}(r) \neq 0$, d.h. es ist möglich $d_{1,n}$ so zu bestimmen, dass auch die Anfangsbedingung $F'_{1,n}(r) = \frac{n\overline{\mu(r)}}{(1-|\mu(r)|^2)r}$ erfüllbar ist. Denn wäre $F_{1,n}(r) = F'_{1,n}(r) = 0$, dann würde aus der Differentialgleichung (24) wegen $\mu(r) \neq 0$ und der Bedingung (60) folgen, dass $F''_{1,n}(r) = 0$ gilt. Indem man nun (24) differenziert, folgt dann auch $F^{(j)}_{1,n}(r) = 0$ für $j \in \mathbb{N}$, d.h. $F_{1,n}(x) \equiv 0$ im Widerspruch zur Gestalt der gefundenen Lösung.

Im anderen Fall, d.h. wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (r-x_0)^k = 0$ gilt, wäre

$$F_{1,n}(x) = c_{1,n} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k,\ c_0 = 1,\ r \leq x \leq R$$

eine zulässige Lösung (denn es gilt wieder $F'_{1,n}(r) \neq 0$).
□

4. Fundamentallösungen für rotationssymmetrische Systeme

In diesem Kapitel soll die Fundamentallösung des $(0,\overline{\mu})$-Systems in $\mathbb{C}\setminus\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$ wie in (2)) mit Hilfe gewisser Funktionen dargestellt werden, die auch zur Konstruktion der verallgemeinerten Potenzen des $(0,\mu)$-Systems dienen. Allgemein gilt folgender

HILFSSATZ 2. *Die Funktionen ν, μ mögen die Bedingung (2) erfüllen. Dann gilt für die Fundamentallösung $M(t,z)$ des $(\nu,\overline{\mu})$-Systems*

$$M(t,z) = \frac{iU(h(\cdot,t))(z) + U(ih(\cdot,t))(z)}{2i} + \overline{\frac{iU(h(\cdot,t))(z) - U(ih(\cdot,t))(z)}{2i}} - i\pi,$$

wobei $h(z,t) := \log(z-t)$ und

$$U(\eta h(\cdot,t))(z) := \eta\log(z-t) + \frac{1}{\pi}\iint\left(\eta\frac{\Phi_1(s,z)}{s-t} + \overline{\eta}\frac{\Phi_2(s,z)}{\overline{s-t}}\right)d\sigma_s$$

definiert werden mit beliebigen $\eta\in\mathbb{C}$, wobei $\Phi_1(t,z)$ und $\Phi_2(t,z)$ die zum (ν,μ)-System gehörigen Kerne sind.

Beweis. Nach Satz 2 kann der Operator P auch auf $L_q(G)$, wobei $1<q\leq 2$ und G ein beschränktes Gebiet seien, definiert werden. Nun gilt

$$P(\Phi_1(\cdot,z))(t) = -\frac{1}{\pi}\iint\frac{\Phi_1(s,z)}{s-t}\,d\sigma_s$$

und

$$\overline{P(\overline{\Phi_2(\cdot,z)})(t)} = -\overline{\frac{1}{\pi}\iint\frac{\overline{\Phi_2(s,z)}}{s-t}\,d\sigma_s} = -\frac{1}{\pi}\iint\frac{\Phi_2(s,z)}{\overline{s-t}}\,d\sigma_s$$

und daher folgt

$$U(h(\cdot,t))(z) = \log(z-t) - P(\Phi_1(\cdot,z))(t) - \overline{P(\overline{\Phi_2(\cdot,z)})(t)},$$

d.h. der Operator U ist für die Funktion $h(z,t)$ wohldefiniert. Somit erhält man

$$\frac{iU(h(\cdot,t))(z) + U(ih(\cdot,t))(z)}{2i} = \log(z-t) - P(\Phi_1(\cdot,z))(t)$$

und

$$\overline{\frac{iU(h(\cdot,t))(z) - U(ih(\cdot,t))(z)}{2i}} = -P(\overline{\Phi_2(\cdot,z)})(t).$$

Nach Satz 4 gilt nun

$$M(t,z) = \log(t-z) - P(\Phi_1(\cdot,z) + \overline{\Phi_2(\cdot,z)})(t)$$

und damit

$M(t,z)$

$$\begin{aligned}
&= \log(t-z) - \log(z-t) + \frac{iU(h(\cdot,t))(z) + U(ih(\cdot,t))(z)}{2i} \\
&\quad + \overline{\frac{iU(h(\cdot,t))(z) - U(ih(\cdot,t))(z)}{2i}} \\
&= \frac{iU(h(\cdot,t))(z) + U(ih(\cdot,t))(z)}{2i} + \overline{\frac{iU(h(\cdot,t))(z) - U(ih(\cdot,t))(z)}{2i}} - i\pi.
\end{aligned}$$

□

Der folgende Satz besagt, dass der Integraloperator U die Potenz cz^n auf die verallgemeinerte Potenz $[\widetilde{c}z^n]_{(\nu,\mu)}$ für ν, μ wie in (11), (12) und $m = 0$ abbildet, ermöglicht also die Berechnung von $Ug(z)$ mit $g(z) = cz^n$, die im übernächsten Satz benötigt wird.

Satz 12. *Die Koeffizienten ν und μ mögen die Voraussetzungen des Satzes 6 erfüllen und es sei $m = 0$ und $h(z) = [cz^n]_{(\nu,\mu)}$ gesetzt. Dann gilt*

$$Vh(z) = \begin{cases} cz^n & : n \leq 0, \\ c(1 + 2F_{2,n}(R))z^n & : n > 0, \end{cases}$$

wobei $F_{2,n}(R)$ sich aus Satz 6 ergibt. Der Integraloperator U bildet hier also die Potenz cz^n auf die verallgemeinerte Potenz $[\widetilde{c}z^n]_{(\nu,\mu)}$ (mit einem gewissen $\widetilde{c}$) ab.

Beweis. Für $n < 0$ gilt nach Hilfssatz 1 und Satz 6

$$\begin{aligned}
Vh(z) =& h(z) - P\left(\nu h_z + \mu \overline{h_z}\right)(z) \\
=& h(z) - P\left(h_{\overline{z}}\right)(z) \\
=& cz^n + 2\begin{cases} \overline{c}\frac{r^{2n}}{z^n}\overline{F_{1,n}(r)} & : \quad |z| \leq r \\ \overline{cz}^n\overline{F_{1,n}(|z|)} + cF_{2,n}(|z|)z^n & : \quad r \leq |z| \leq R \\ cF_{2,n}(R)z^n & : \quad |z| \geq R \end{cases} \\
& - 2\begin{cases} 0 & : \quad |z| \leq r \\ \overline{c}P\left(n\overline{t}^{n-1}\overline{F_{1,n}(|t|)} + \overline{t}^n\overline{F'_{1,n}(|t|)}\frac{|t|}{2\overline{t}}\right)(z) & \\ +cP\left(t^nF'_{2,n}(|t|)\frac{|t|}{2\overline{t}}\right)(z) & : \quad r \leq |z| \leq R \\ 0 & : \quad |z| \geq R \end{cases} \\
=& cz^n + 2\begin{cases} \overline{c}\frac{r^{2n}}{z^n}\overline{F_{1,n}(r)} & : \quad |z| \leq r \\ \overline{cz}^n\overline{F_{1,n}(|z|)} + cF_{2,n}(|z|)z^n & : \quad r \leq |z| \leq R \\ cF_{2,n}(R)z^n & : \quad |z| \geq R \end{cases} \\
& - 2\begin{cases} \overline{c}\frac{r^{2n}}{z^n}\overline{F_{1,n}(r)} & : \quad |z| \leq r \\ \overline{cz}^n\overline{F_{1,n}(|z|)} + cF_{2,n}(|z|)z^n & : \quad r \leq |z| \leq R \\ cF_{2,n}(R)z^n & : \quad |z| \geq R \end{cases}
\end{aligned}$$

$=cz^n,$

und für $n > 0$

$$Vh(z) = cz^n + 2\begin{cases} 0 & : \ |z| \leq r \\ \overline{cz}^n \overline{F_{1,n}(|z|)} + cF_{2,n}(|z|)z^n & : \ r \leq |z| \leq R \\ \overline{c}\frac{R^{2n}}{z^n}\overline{F_{1,n}(R)} + cF_{2,n}(R)z^n & : \ |z| \geq R\ , \end{cases}$$

$$-2\begin{cases} 0 & : \ |z| \leq r \\ \overline{c}P\left(n\overline{t}^{n-1}\overline{F_{1,n}(|t|)} + \overline{t}^n\overline{F'_{1,n}(|t|)}\frac{|t|}{2\overline{t}}\right)(z) & \\ +cP\left(t^nF'_{2,n}(|t|)\frac{|t|}{2\overline{t}}\right)(z) & : \ r \leq |z| \leq R \\ 0 & : \ |z| \geq R\ , \end{cases}$$

$=c(1 + 2F_{2,n}(R))z^n,$

und für n=0

$$Vh(z) = c,$$

da $F_{1,n}(x) \equiv F_{2,n}(x) \equiv 0$ gilt.

□

Im folgenden Satz wird nun die Fundamentallösung mittels der Funktionen $F_{1,n}$ und $F_{2,n}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ dargestellt, welche schon bei der Konstruktion der verallgemeinerten Potenzen des adjungierten Systems (μ wird durch $\overline{\mu}$ ersetzt) eine wichtige Rolle spielten (vgl. Satz 6), wodurch deren Bedeutung für rotationssymmetrische Systeme deutlich wird.

Satz 13. *Es sei $\nu(z) \equiv 0$ in $\mathbb{C}$, $0 < r < R < \infty$ und*

$$\mu(z) = \begin{cases} f(|z|) & : r \leq |z| \leq R, \\ 0 & : sonst, \end{cases}$$

wobei f stetig in $\{z : r \leq |z| \leq R\}$ sei.
Dann ist die Fundamentallösung $M(t, z)$ des $(0, \overline{\mu})$-Systems für $|t| < r$ gegeben durch

$$M(t, z) - M(0, z) = \log(z - t) - \log(z)$$

$$-2\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{t^n\overline{z}^n}{r^{2n}}F_{1,-n}(r) & : |z| \leq r, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n}(F_{1,-n}(|z|) + F_{2,-n}(|z|)) & : r \leq |z| \leq R, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n}F_{2,-n}(R) & R \leq |z| \end{cases}$$

und für $|t| > R$ durch

$$M(t, z) = \log(t - z)$$

$$-2\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-F_{2,n}(R)}{1+2F_{2,n}(R)}\frac{z^n}{nt^n} & : |z|\le r,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2F_{2,n}(R)}\frac{z^n}{nt^n}(F_{1,n}(|z|)+F_{2,n}(|z|)-F_{2,n}(R)) & : r\le|z|\le R,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{F_{1,n}(R)}{1+2F_{2,n}(R)}\frac{R^{2n}}{t^n\overline{z}^n} & : R\le|z|,\end{cases}$$

wobei sich die Funktionen $F_{1,n}, F_{2,n}$ für $n\in\mathbb{Z}$ aus Satz 6 ergeben.

Beweis. Es ist für $t\neq z$ (und somit $t\neq 0$ für $|z|\le|t|$ bzw. $z\neq 0$ für $|t|\le|z|$)

$$\log(z-t)=\begin{cases}\log(z)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n} & : |t|\le|z|,\\ \log(-t)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{z^n}{t^n} & : |z|\le|t|.\end{cases}$$

Nach (5) gilt $\Phi_1(t,z)=\Phi_2(t,z)=0$ für $|t|<r$ und $|t|>R$, daher erhält man nach Satz 12 für $|t|<r$ und $|z|>|t|$

$$\begin{aligned}U(h(\cdot,t))(z)&=\log(z-t)+\frac{1}{\pi}\iint\left(\frac{\Phi_1(s,z)}{s-t}+\overline{\frac{\Phi_2(s,z)}{s-t}}\right)d\sigma_s\\&=\log(z)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n}\\&\quad+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\pi}\iint\left(\Phi_1(s,z)\frac{t^n}{s^{n+1}}+\Phi_2(s,z)\frac{\overline{t}^n}{\overline{s}^{n+1}}\right)d\sigma_s\\&=\log(z)+\frac{1}{\pi}\iint\left(\Phi_1(s,z)\frac{1}{s}+\Phi_2(s,z)\frac{1}{\overline{s}}\right)d\sigma_s\\&\quad+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n}+\frac{1}{\pi}\iint\left(\Phi_1(s,z)\frac{t^n}{s^{n+1}}+\Phi_2(s,z)\frac{\overline{t}^n}{\overline{s}^{n+1}}\right)d\sigma_s\right)\\&=U(h(\cdot,0))(z)-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{t^n}{n}z^{-n}\right]_{\mu(z)}.\end{aligned}$$

Somit ergibt sich nach Hilfssatz 2

$$M(t,z)=\frac{iU(h(\cdot,0))(z)-i\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{t^n}{n}z^{-n}\right]_{\mu(z)}+U(ih(\cdot,0))(z)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{it^n}{n}z^{-n}\right]_{\mu(z)}}{2i}$$

$$+\overline{\frac{iU(h(\cdot,0))(z)-i\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{t^n}{n}z^{-n}\right]_{\mu(z)}-U(ih(\cdot,0))(z)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{it^n}{n}z^{-n}\right]_{\mu(z)}}{2i}}-i\pi$$

und weiter nach Satz 6

$$M(t,z)-M(0,z)$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n} - 2\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{t^n \overline{z}^n}{r^{2n}} F_{1,-n}(r) & : |t| < |z| \le r, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n} F_{1,-n}(|z|) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n} F_{2,-n}(|z|) & : r \le |z| \le R, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n} F_{2,-n}(R) & R \le |z| \end{cases}$$

$$= \log(z-t) - \log(z) - 2\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{t^n \overline{z}^n}{r^{2n}} F_{1,-n}(r) & : |t| < |z| \le r, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n} (F_{1,-n}(|z|) + F_{2,-n}(|z|)) & : r \le |z| \le R, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n} F_{2,-n}(R) & R \le |z|. \end{cases}$$

Für $|t| < r$, $|z| \le |t|$ und $t \ne z$ ergibt sich

$$\begin{aligned} & U(h(\cdot,t))(z) \\ &= \log(z-t) + \frac{1}{\pi}\iint \left(\frac{\Phi_1(s,z)}{s-t} + \frac{\Phi_2(s,z)}{\overline{s-t}} \right) d\sigma_s \\ &= \log(-t) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{z^n}{t^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi}\iint \left(\Phi_1(s,z)\frac{t^n}{s^{n+1}} + \Phi_2(s,z)\frac{\overline{t}^n}{\overline{s}^{n+1}} \right) d\sigma_s \\ &= \log(-t) - \log(z) + \log(z) + \frac{1}{\pi}\iint \left(\Phi_1(s,z)\frac{1}{s} + \Phi_2(s,z)\frac{1}{\overline{s}} \right) d\sigma_s \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\frac{z^n}{t^n} + \frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n} - \frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n} + \frac{1}{\pi}\iint \left(\frac{\Phi_1(s,z)t^n}{s^{n+1}} + \frac{\Phi_2(s,z)\overline{t}^n}{\overline{s}^{n+1}} \right) d\sigma_s \right) \\ &= \log(-t) - \log(z) + U(h(\cdot,0))(z) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\frac{z^n}{t^n} + \frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n} - \left[\frac{t^n}{n} z^{-n} \right]_{\mu(z)} \right). \end{aligned}$$

Somit ergibt sich nach Satz 6

$$M(t,z) - M(0,z) = \log(z-t) - \log(z) - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{t^n \overline{z^n}}{r^{2n}} F_{1,-n}(r).$$

Insgesamt erhält man somit für $|t| < r$

$$\begin{aligned} M(t,z) - M(0,z) &= \log(z-t) - \log(z) \\ &\quad - 2\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{t^n \overline{z}^n}{r^{2n}} F_{1,-n}(r) & : |z| \le r, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n} (F_{1,-n}(|z|) + F_{2,-n}(|z|)) & : r \le |z| \le R, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n} F_{2,-n}(R) & R \le |z|. \end{cases} \end{aligned}$$

Für $|t| > R$ und $|z| < |t|$ gilt

$$U(h(\cdot,t))(z) = \log(-t) - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(1+2F_{2,n}(R))nt^n}z^n\right]_{\mu(z)}$$

und daher

$$M(t,z) = \frac{2i\log(-t) - i\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(1+2F_{2,n}(R))nt^n}z^n\right]_{\mu(z)} - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{i}{(1+2F_{2,n}(R))nt^n}z^n\right]_{\mu(z)}}{2i}$$

$$+ \overline{\frac{-i\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(1+2F_{2,n}(R))nt^n}z^n\right]_{\mu(z)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{i}{(1+2F_{2,n}(R))nt^n}z^n\right]_{\mu(z)}}{2i}} - i\pi$$

und weiter nach Satz 6

$$M(t,z) = \log(z-t) - i\pi$$
$$-2\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-F_{2,n}(R)}{1+2F_{2,n}(R)}\frac{z^n}{nt^n} & : |z| \le r,\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2F_{2,n}(R)}\frac{z^n}{nt^n}(F_{1,n}(|z|)+F_{2,n}(|z|)-F_{2,n}(R)) & : r \le |z| \le R,\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{1,n}(R)}{1+2F_{2,n}(R)}\frac{R^{2n}}{t^n\overline{z}} & : R \le |z| < |t|\end{cases}$$

und für $|t| > R$ und $|z| \ge |t|$, $t \ne z$ gilt

$$\begin{aligned}
&U(h(\cdot,t))(z)\\
&= \log(z-t) + \frac{1}{\pi}\iint\left(\frac{\Phi_1(s,z)}{s-t} + \frac{\Phi_2(s,z)}{\overline{s-t}}\right)d\sigma_s\\
&= \log(z) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\pi}\iint\left(\Phi_1(s,z)\frac{s^n}{t^{n+1}} + \Phi_2(s,z)\frac{\overline{s}^n}{\overline{t}^{n+1}}\right)d\sigma_s\\
&= \log(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(-\frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n} + \frac{1}{n}\frac{z^n}{t^n} - \frac{1}{n}\frac{z^n}{t^n}\\
&\qquad -\frac{1}{\pi}\iint\left(\Phi_1(s,z)\frac{s^{n-1}}{t^n} + \Phi_2(s,z)\frac{\overline{s}^{n-1}}{\overline{t}^n}\right)d\sigma_s\Bigg)\\
&= \log(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n} + \frac{1}{n}\frac{z^n}{t^n} - \left[\frac{1}{(1+2F_{2,n}(R))nt^n}z^n\right]_{\mu(z)}\right)
\end{aligned}$$

und weiter nach Satz 6

$$M(t,z) = \log(z-t) - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{1,n}(R)}{1+2F_{2,n}(R)}\frac{R^{2n}}{t^n\overline{z}} - i\pi.$$

Insgesamt erhält man somit für $|t| > R$

$$M(t,z) = \log(t-z)$$

$$-2\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-F_{2,n}(R)}{1+2F_{2,n}(R)}\frac{z^n}{nt^n} & : |z|\leq r,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2F_{2,n}(R)}\frac{z^n}{nt^n}\big(F_{1,n}(|z|)+F_{2,n}(|z|)-F_{2,n}(R)\big) & : r\leq|z|\leq R,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{F_{1,n}(R)}{1+2F_{2,n}(R)}\frac{R^{2n}}{t^n\overline{z}^n} & : R\leq|z|.\end{cases}$$

□

Literaturverzeichnis

[1] U. Ascher, R.Mattheij, R.Russell. Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations. Prentice Hall, (1988).

[2] J.B.Garnett. Bounded Analytic Functions. Academic Press, New York, (1981).

[3] P.Hartmann. Ordinary Differential Equations. Birkhäuser, Boston, (1982).

[4] R.Kühnau. Extremalprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit kreisringweise konstanter Dilatationsbeschränkung. Akademie-Verlag, Berlin, Band 66 (1975).

[5] W.Luther, K.Niederdrenk, F.Reutter, H.Yserentant. Gewöhnliche Differentialgleichungen, Vieweg, Braunschweig, (1987).

[6] H.Renelt. Quasikonforme Abbildungen und elliptische Systeme erster Ordnung in der Ebene, Teubner-Texte zur Mathematik, Band 46, Leipzig, (1982).

[7] H.Renelt. Generalized Powers in the Theory of (ν, μ)-Solutions. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, A 40(22):217-235, (1986).

[8] H.Renelt. On the Growth of Generalized Powers. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, A VOL. LII.1(17):157-167, (1998).

[9] K.Rödel. Konstruktive Methoden zur Berechnung von verallgemeinerten Potenzen. Diplomarbeit. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. (1997).

[10] K.Rödel. Fundamentallösungen für Cauchy-Riemann-Systeme. Reports of the Institute of Analysis. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. Report No. 07 (2000).

[11] I.Schur. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. Jour. für Math.(Crelle), 147, 205-232, (1917).

[12] J.Spitzner. Generalized Powers for Cauchy-Riemann Systems with Radially Symmetrical Coefficients. Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, A VOL. LII.2(15):137-147, (1998).

[13] J.Spitzner. Parameterabhängikkeit bei Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungssystemen. Berichte aus der Mathematik. Shaker Verlag, Aachen, (2000).

[14] I.N.Vekua. Verallgemeinerte analytische Funktionen. Berlin, (1963).