Verallgemeinerte Potenzen für Cauchy-Riemann-Systeme

Kristian Rödel

Verallgemeinerte Potenzen sind globale Lösungen von Cauchy-Riemann-Systemen mit der topologischen Struktur $w(z) = (\chi(z))^n$, wobei n eine ganze Zahl und $\chi(\cdot)$ eine quasikonforme Abbildung von $\mathbb{C}$ auf sich ist. Diese verallgemeinerten Potenzen spielen eine ähnliche Rolle wie die gewöhnlichen Potenzen in der klassischen Funktionentheorie, z.B. für die Entwicklung der Lösungen von Cauchy-Riemann-Systemen in verallgemeinerte Taylorreihen. Die Bedeutung dieser speziellen Lösungen lässt es wünschenswert erscheinen, sie für große Klassen möglichst explizit anzugeben. Dieses soll Gegenstand der vorliegenden Arbeit sein. Dabei ergibt sich insbesondere ein Zusammenhang mit Schurschen und Hankelschen Matrizen.

1. **Einleitung.** Es sei ein Cauchy-Riemann-System, d.h. ein gleichmäßig elliptisches System der Form

$$f_{\overline{z}} = \nu(z) f_z + \mu(z) \overline{f_z} \tag{1}$$

gegeben, wobei die Koeffizienten ν und μ die Bedingungen

$$\begin{aligned} &supp(|\nu| + |\mu|) =: \mathcal{K} \Subset \mathbb{C}, \quad \nu, \mu \in L_\infty, \\ &\| |\nu| + |\mu| \|_{L_\infty} \leq const =: k < 1 \end{aligned} \tag{2}$$

erfüllen. Dabei ist das System

$$f_{\overline{z}} = \nu(z) f_z \tag{3}$$

ein Beltrami-System, wogegen das System

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) \overline{f_z} \tag{4}$$

Anti-Beltrami-System heißen soll. Die Begriffe Nullstelle n-ter Ordnung und Pol n-ter Ordnung des Systems (1) werden wie folgt definiert.

Definition 1 ([2], III.1.5). *Der Punkt z_0 heißt Nullstelle n-ter Ordnung bzw. Pol n-ter Ordnung von $w(z)$, wenn in irgendeiner Darstellung*

$$w(z) = f(\chi(z))$$

mit einer quasikonformen Abbildung $\chi(z)$ einer Umgebung U von z_0 und einer in $\chi(U)$ analytischen Funktion f dieses f in $\chi(z_0)$ eine Nullstelle n-ter Ordnung bzw. einen Pol n-ter Ordnung hat.

Dabei hängt die Ordnung nicht von der jeweiligen Darstellung ab. In der folgenden Definition werden die Begriffe Nullstelle und Pol unter dem einheitlichen Begriff "Punkt n-ter Ordnung" zusammengefasst.

Definition 2 ([3], 1.3). *Es sei G ein Gebiet, $z_0 \in G$ und $w(z)$ sei eine (ν, μ)-Lösung in $G \setminus \{z_0\}$. Der Punkt z_0 heißt Punkt der Ordnung n von $w(z)$, wenn entweder n eine negative ganze Zahl ist und $w(z)$ einen Pol (-n)-ter Ordnung in z_0 besitzt oder wenn n eine nichtnegative ganze Zahl ist und $w(z)$ eine Nullstelle n-ter Ordnung in z_0 besitzt.*

Es gilt nun folgender

Satz 1 ([3]). *Es sei $n \neq 0$ eine ganze Zahl und $c \neq 0$ eine beliebige komplexe Zahl. Unter den Bedingungen (2) und $\nu, \mu \in HL_p(\{z_0\}, \{\infty\})$ existiert genau eine (ν, μ)-Lösung $w(z)$ in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ mit den Eigenschaften*

1. *$w(z)$ hat in z_0 eine asymptotische Entwicklung*
$$\begin{aligned} w(z) &= c\left(z - z_0 + \mathfrak{b}\overline{(z - z_0)}\right)^n - b\overline{c}\left(\overline{z - z_0} + \overline{\mathfrak{b}}(z - z_0)\right)^n \\ &\quad + O\left(|z - z_0|^{n+\alpha}\right), \end{aligned}$$
mit bestimmten $b, \mathfrak{b}$ und $\alpha > 0$,
2. *der Punkt ∞ ist ein Punkt der Ordnung $-n$ von $w(z)$.*

Diese eindeutig bestimmte Funktion $w(z)$ wird verallgemeinerte n-te Potenz genannt und mit $[c(z - z_0)^n]_{(\nu,\mu)}$ bezeichnet.
In [2], III.3.2 werden b und $\mathfrak{b}$ folgendermaßen angegeben:

$$b = \omega(\kappa), \qquad \mathfrak{b} = \omega(\sigma),$$
$$\kappa = -\frac{\mu(z_0)}{1 + |\mu(z_0)|^2 - |\nu(z_0)|^2},$$
$$\sigma = \frac{\nu(z_0)}{1 + |\nu(z_0)|^2 - |\mu(z_0)|^2},$$

wobei $\omega(\cdot)$ die Funktion

$$\omega(x) = \frac{2x}{1 + \sqrt{1 - 4|x|^2}}$$

ist. Für ein Anti-Beltrami-System, d.h. ein System der Gestalt (4), erhält man demzufolge $\mathfrak{b} = 0$ und $b = -\mu(z_0)$, d.h. $[c(z - z_0)^n]_{(0,\mu)}$ (nachfolgend auch mit $[c(z - z_0)^n]_\mu$ bezeichnet) hat in z_0 die asymptotische Entwicklung

$$[c(z - z_0)^n]_\mu = c\,(z - z_0)^n + \overline{c}\mu(z_0)\left(\overline{z - z_0}\right)^n + O\left(|z - z_0|^{n+\alpha}\right). \quad (5)$$

Nach dem Darstellungstheorem hat $[c(z-z_0)^n]_{(\nu,\mu)}$ auch die Form $(\chi(z)-\chi(z_0))^n$, wobei $\chi(z)$ eine quasikonforme Abbildung von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}$ ist.
Bei der Betrachtung von verallgemeinerten Potenzen erweist sich der Integraloperator U als hilfreich, da der Operator eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $A(D)$ auf $\mathcal{A}(D,\nu,\mu)$ ermöglicht, wobei

$$\begin{aligned} B_p(D) &= W^1_{p,loc}(D)\cap C(D), \\ A(D) &= \{f \ : \ f \text{ ist analytisch in } D\}, \\ \mathcal{A}(D,\nu,\mu) &= \{f \ : \ f \text{ ist } (\nu,\mu)\text{-Lösung in } D\} \end{aligned}$$

und D ein Gebiet $\subseteq \mathbb{C}$ seien. Im folgenden Satz wird nun u.a. die Abbildung U definiert.

Satz 2 ([2], IV.1.9)**.** *Die Funktionen ν und μ mögen die Bedingung (2) erfüllen. Es gibt zwei f.ü. in $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ definierte Funktionen $\Phi_1(t,z)$ und $\Phi_2(t,z)$ mit folgenden Eigenschaften:*

I. *Es sind $\Phi_1(t,z)$, $\Phi_2(t,z)\in L_q$ als Funktionen von t bei beliebigem, aber festem $z\in\mathbb{C}$ für jedes $q\in[1,2)$;*
   $supp(|\Phi_1(\cdot,z)|+|\Phi_2(\cdot,z)|)$ ist enthalten in $\mathcal{K}$.
II. *Es sei für alle $g\in B_p(D)$ mit $2<p$, $\mathcal{K}\Subset D$*

$$Ug(z) := g(z) + \frac{1}{\pi}\iint \left(\Phi_1(t,z)g_t + \Phi_2(t,z)\overline{g_t}\right) d\sigma_t$$

   (hierbei wird $\Phi_1(t,z)f(t)=\Phi_2(t,z)f(t)=0$ gesetzt $\forall t\notin\mathcal{K}$ und jede Funktion f; Integrale, bei denen kein Integrationsbereich angegeben ist, sind über den gesamten Träger des Integranden zu berechnen). Wenn $g\in B_p(D)$ auf einer offen Teilmenge $D'\subseteq D$ analytisch ist, so ist Ug eine (ν,μ)-Lösung in D'. Insbesondere ist U eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $A(D)$ auf $\mathcal{A}(D,\nu,\mu)$.
III. *$\Phi_1(t,z)$ und $\Phi_2(t,z)$ mit den in I. und II. genannten Eigenschaften sind für beliebiges, aber festes $z\in\mathbb{C}$ als Elemente des L_q eindeutig bestimmt.*

2. **Verallgemeinerte Potenzen zu Anti-Beltrami-Systemen.** Da ein Beltrami-System komplex-linear ist und die Komposition einer analytischen Funktion mit einer Beltrami-Lösung wieder eine Beltrami-Lösung ergibt, gilt für die zugehörigen verallgemeinerten Potenzen

$$[c(z-z_0)^n]_{(\nu,0)} = c[(z-z_0)^n]_{(\nu,0)} = c[(z-z_0)]^n_{(\nu,0)},$$

d.h. es ist ausreichend, die schlichte Lösung zu konstruieren, um sämtliche verallgemeinerten Potenzen zu bestimmen. Der Fall eines antianalytischen Beltrami-Koeffizienten ν (d.h. $\overline{\nu}$ ist eine analytische Funktion) für $|z|<R$, $\nu(z)\equiv 0$ für $|z|>R$ und andere Beispiele werden in

[5] behandelt.
Im Gegensatz dazu sind Anti-Beltrami-Systeme nur reell linear, deshalb gestaltet sich die Konstruktion der verallgemeinerten Potenzen wesentlich schwieriger. In diesem Kapitel sollen nun zu gewissen Klassen deren verallgemeinerte Potenzen bestimmt werden. Nachfolgend werden die Fälle μ analytisch bzw. anti-analytisch für $|z| < R$, $\mu(z) \equiv 0$ für $|z| \geq R$ behandelt.

2.1. *Analytische Koeffizienten.* Im folgenden Hilfssatz wird das Bild von αz^n unter der in Satz 2 genannten Abbildung U berechnet. Mittels dieser Berechnungen können dann im nächsten Satz die positiven verallgemeinerten Potenzen für analytische Koeffizienten angegeben werden.

Hilfssatz 1. *Es sei*

$$g(z) = \alpha z^n \quad \textit{mit} \quad n \in \mathbb{N}$$

und

$$\mu(z) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j z^j & : \quad |z| < R, \\ 0 & : \quad |z| \geq R, \end{cases}$$

mit $R \in \mathbb{R}^+$ *gegeben. Dann ist für* $|z| < R$

$$\begin{aligned} &U(g(\cdot))(z) \\ =&\frac{1}{1-|\mu(z)|^2}\left(\alpha z^n - \alpha\mu(z)\sum_{j=1}^{n}\overline{a_{n-j}}R^{2(n-j)}z^j - \overline{\alpha}R^{2n}\sum_{j=0}^{\infty}a_{j+n}z^j\right) \\ &+\frac{\mu(z)}{1-|\mu(z)|^2}\overline{\left(\alpha z^n - \alpha\mu(z)\sum_{j=1}^{n}\overline{a_{n-j}}R^{2(n-j)}z^j - \overline{\alpha}R^{2n}\sum_{j=0}^{\infty}a_{j+n}z^j\right)} \end{aligned} \tag{6}$$

und für $|z| \geq R$

$$U(g(\cdot))(z) = \alpha z^n + \overline{\alpha}\frac{R^{2n}}{z^n}\sum_{j=0}^{n-1}a_j z^j. \tag{7}$$

(Die Behauptung ist auch für $n = 0$ richtig, wenn man wie üblich $\sum\limits_{j=0}^{-1} \cdots = 0$ setzt.)

Beweis. Mittels der in [5], Folgerung 1 berechneten Kerne Φ_1 und Φ_2 erhält man für $|z| < R$

$$U(g(\cdot))(z) = g(z) + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|t|<R}\left(\Phi_1(t,z)g_t(t) + \Phi_2(t,z)\overline{g_t(t)}\right)\,d\sigma_t$$

$$=z^n + \frac{\alpha\mu(z)}{1-|\mu(z)|^2} I_1(z) + \frac{\alpha\mu(z)}{1-|\mu(z)|^2} I_2(z)$$
$$+ \frac{\overline{\alpha}}{1-|\mu(z)|^2} I_3(z) + \frac{\overline{\alpha}|\mu(z)|^2}{1-|\mu(z)|^2} I_4(z),$$

wobei

$$I_1(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{|t|<R} \frac{\overline{\mu(t)} n t^{n-1}}{\overline{t-z}}\, d\sigma_t,$$

$$I_2(z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|t|<R} \frac{\overline{\mu(t)} n t^{n-1}}{\overline{t} - \frac{R^2}{z}}\, d\sigma_t,$$

$$I_3(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{|t|<R} \frac{\mu(t) n \overline{t}^{n-1}}{t-z}\, d\sigma_t,$$

$$I_4(z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|t|<R} \frac{\mu(t) n \overline{t}^{n-1}}{t - \frac{R^2}{\overline{z}}}\, d\sigma_t$$

seien. Berechnet man $I_1(z)$, so ergibt sich

$$I_1(z) = -\sum_{j=0}^{\infty} \overline{a_j} \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|t|<R} \frac{\overline{t}^j n t^{n-1}}{\overline{t-z}}\, d\sigma_t,$$

und weiter nach Greenscher Formel

$$-\frac{1}{\pi} \iint\limits_{|t|<R} \frac{\overline{t}^j n t^{n-1}}{\overline{t-z}}\, d\sigma_t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=R} \frac{\overline{t}^j t^n}{\overline{t-z}}\, d\overline{t} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t-z|=\varepsilon} \frac{\overline{t}^j t^n}{\overline{t-z}}\, d\overline{t}.$$

Eine Nebenrechnung ergibt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=R} \frac{\overline{t}^j t^n}{\overline{t-z}}\, d\overline{t} = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{-i\phi})^j (Re^{i\phi})^n Rie^{-i\phi}}{Re^{-i\phi} - \overline{z}}\, d\phi$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\phi})^{j+1} (Re^{-i\phi})^{j+1} (Re^{i\phi})^n Rie^{i\phi}}{(Re^{i\phi})^{j+2} (Re^{-i\phi} - \overline{z})}\, d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{R^{2j+2} (Re^{i\phi})^n Rie^{i\phi}}{(Re^{i\phi})^{j+1} (\overline{z} Re^{i\phi} - R^2)}\, d\phi$$

$$= \frac{R^{2j+2}}{2\pi i} \int\limits_{|t|=R} \frac{t^{n-j-1}}{(\overline{z} t - R^2)}\, dt.$$

Für $z=0$ erhält man daher

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=R}\frac{\overline{t}^j t^n}{\overline{t-z}}\,d\overline{t} = -\frac{R^{2j}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=R} t^{n-j-1}\,dt = \begin{cases} -R^{2n} & : \; n=j, \\ 0 & : \; sonst, \end{cases}$$

und für $z \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=R}\frac{\overline{t}^j t^n}{\overline{t-z}}\,d\overline{t} &= \frac{R^{2j+2}}{2\pi i\overline{z}}\int\limits_{|t|=R}\frac{t^{n-j-1}}{(t-\frac{R^2}{\overline{z}})}\,dt \\
&= \frac{R^{2j+2}}{\overline{z}}\begin{cases} 0 & : \; j<n, \\ \frac{1}{(j-n)!}\left(\frac{t^{n-j-1}}{(t-\frac{R^2}{\overline{z}})}\right)^{(j-n)}_{t=0} & : \; n \leq j \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & : \; j<n, \\ -\overline{z}^{j-n}R^{2n} & : \; n\leq j. \end{cases}
\end{aligned}$$

Eine weitere Nebenrechnung ergibt

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t-z|=\varepsilon}\frac{\overline{t}^j t^n}{\overline{t-z}}\,d\overline{t}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(\overline{z}+\varepsilon e^{-i\phi})^j(z+\varepsilon e^{i\phi})^n i\varepsilon e^{-i\phi}}{\varepsilon e^{-i\phi}}\,d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(\varepsilon e^{i\phi})^j(\overline{z}+\varepsilon e^{-i\phi})^j(z+\varepsilon e^{i\phi})^n i\varepsilon e^{i\phi}}{(\varepsilon e^{i\phi})^{j+1}}\,d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t-z|=\varepsilon}\frac{(\overline{z}(t-z)+\varepsilon^2)^j t^n}{(t-z)^{j+1}}\,dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{j!}\left((\overline{z}(t-z)+\varepsilon^2)^j t^n\right)^{(j)}_{t=z} = z^n\overline{z}^j.$$

Damit erhält man

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|t|<R}\frac{\overline{t}^j n t^{n-1}}{\overline{t-z}}\,d\sigma_t = \begin{cases} z^n\overline{z}^j & : \; j<n, \\ z^n\overline{z}^j - \overline{z}^{j-n}R^{2n} & : \; n\leq j, \end{cases}$$

und somit

$$I_1(z) = z^n\overline{\mu(z)} - \frac{R^{2n}}{\overline{z}^n}\sum_{j=n}^{\infty}\overline{a_j z^j}.$$

Für $I_2(z)$ gilt

$$I_2(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{a_j} \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|t|<R} \frac{\overline{t}^j n t^{n-1}}{\overline{t} - \frac{R^2}{z}} \, d\sigma_t.$$

Nun ist nach Greenscher Formel

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_{|t|<R} \frac{\overline{t}^j n t^{n-1}}{\overline{t} - \frac{R^2}{z}} \, d\sigma_t = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=R} \frac{\overline{t}^j t^n}{\overline{t} - \frac{R^2}{z}} \, d\overline{t}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{-i\phi})^j (Re^{i\phi})^n i R e^{-i\phi}}{Re^{-i\phi} - \frac{R^2}{z}} \, d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{-i\phi})^{j+1} (Re^{-i\phi})^{j+1} (Re^{i\phi})^n i R e^{i\phi}}{(Re^{i\phi})^{j+2} (Re^{-i\phi} - \frac{R^2}{z})} \, d\phi$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{R^{2j+2} (Re^{i\phi})^n i R e^{i\phi}}{(Re^{i\phi})^{j+1} (Re^{i\phi} \frac{R^2}{z} - R^2)} \, d\phi$$

$$= -\frac{R^{2j} z}{2\pi i} \int\limits_{|t|=R} \frac{t^{n-j-1}}{t-z} \, dt$$

$$= -R^{2j} z \begin{cases} z^{n-j-1} & : \ j < n, \\ z^{n-j-1} + \frac{1}{(j-n)!} \left(\frac{1}{t-z} \right)^{(j-n)}_{t=0} & : \ n \le j \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -R^{2j} z^{n-j} & : \ j < n, \\ 0 & : \ n \le j \end{cases}$$

und somit

$$I_2(z) = -z^n \sum_{j=0}^{n-1} \overline{a_j} \frac{R^{2j}}{z^j}.$$

Für $I_3(z)$ gilt

$$I_3(z) = -\sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|t|<R} \frac{t^j n \overline{t}^{n-1}}{t-z} \, d\sigma_t.$$

Nun ist

$$-\frac{1}{\pi} \iint\limits_{|t|<R} \frac{t^j n \overline{t}^{n-1}}{t-z} \, d\sigma_t = z^{j-n} \begin{cases} 2n \int_0^{|z|} x^{2n-1} dx & : \ j < n, \\ -2n \int_{|z|}^{R} x^{2n-1} dx & : \ n \le j \end{cases}$$

$$= z^{j-n} \begin{cases} |z|^{2n} & : \ j < n, \\ |z|^{2n} - R^{2n} & : \ n \leq j \end{cases}$$

(siehe z.B. [4],4.2) und somit

$$I_3(z) = \overline{z}^n \mu(z) - \frac{R^{2n}}{z^n} \sum_{j=n}^{\infty} a_j z^j .$$

Für $I_4(z)$ gilt

$$I_4(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|t|<R} \frac{t^j n \overline{t}^{n-1}}{t - \frac{R^2}{\overline{z}}} \, d\sigma_t .$$

Nun ist nach Greenscher Formel

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_{|t|<R} \frac{t^j n \overline{t}^{n-1}}{t - \frac{R^2}{\overline{z}}} \, d\sigma_t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=R} \frac{t^j \overline{t}^n}{t - \frac{R^2}{\overline{z}}} \, dt = \frac{R^{2n}}{2\pi i} \int\limits_{|t|=R} \frac{t^{j-n}}{t - \frac{R^2}{\overline{z}}} \, dt$$

$$= R^{2n} \begin{cases} \frac{1}{(n-j-1)!} \left(\frac{1}{t - \frac{R^2}{\overline{z}}} \right)^{(n-j-1)}_{t=0} & : \ j < n, \\ 0 & : \ n \leq j \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\overline{z}^{n-j} R^{2j} & : \ j < n, \\ 0 & : \ n \leq j \end{cases}$$

und somit

$$I_4(z) = -\overline{z}^n \sum_{j=0}^{n-1} a_j \frac{R^{2j}}{z^j} .$$

Nun wird noch $U(g(\cdot))(z)$ für $|z| \geq R$ berechnet. Entnimmt man [5], Folgerung 1 wieder die Kerne Φ_1, Φ_2, so gilt

$$U(g(\cdot))(z) = \alpha z^n - \overline{\alpha} \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|t|<R} \frac{\mu(t) n \overline{t}^{n-1}}{t - z} \, d\sigma_t$$

$$= \alpha z^n - \overline{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|t|<R} \frac{t^j n \overline{t}^{n-1}}{t - z} \, d\sigma_t .$$

Nun ist für $|z| \geq R$

$$-\frac{1}{\pi} \iint\limits_{|t|<R} \frac{t^j n \overline{t}^{n-1}}{t - z} \, d\sigma_t = z^{j-n} \begin{cases} 2n \int\limits_0^R x^{2n-1} dx & : \ j < n, \\ 0 & : \ n \leq j \end{cases}$$

$$= \begin{cases} z^{j-n} R^{2n} & : \quad j < n, \\ 0 & : \quad n \leq j \end{cases}$$

(siehe z.B. [4],4.2) und somit für $|z| \geq R$

$$U(g(\cdot))(z) = \alpha z^n + \overline{\alpha} \frac{R^{2n}}{z^n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j .$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

□

Im Fall analytischer Koeffizienten haben die verallgemeinerten Potenzen dann folgende Gestalt.

Satz 3. *Es sei*

$$\mu(z) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j z^j & : \quad |z| < R, \\ 0 & : \quad |z| \geq R, \end{cases}$$

mit $R \in \mathbb{R}^+$, $\|\mu\|_{L_\infty} < 1$, $n \in \mathbb{N}$ *und* $c \in \mathbb{C}$.

I. *Dann sind die positiven verallgemeinerten Potenzen gegeben durch*

$$[cz^n]_\mu = U\left(P_n(\cdot)\right)(z), \tag{8}$$

wobei $P_n(z)$ *das Polynom*

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_n \frac{z^n}{R^n} \tag{9}$$

ist, für dessen Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *gilt*

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \left(I_{n+1} - \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}\overline{\mathfrak{A}}^{-1}\overline{\mathfrak{B}} \right)^{-1} \left(\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{c} + \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}\overline{\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{c}} \right). \tag{10}$$

Dabei sei I_{n+1} *die* $(n+1) \times (n+1)$*-Einheitsmatrix,*

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 - \mathfrak{y}_0\overline{\mathfrak{y}_0} & -\mathfrak{y}_0\overline{\mathfrak{y}_1} & -\mathfrak{y}_0\overline{\mathfrak{y}_2} & \ldots & -\mathfrak{y}_0\overline{\mathfrak{y}_{n-1}} \\ 0 & -\mathfrak{y}_1\overline{\mathfrak{y}_0} & 1 - \mathfrak{y}_1\overline{\mathfrak{y}_1} & -\mathfrak{y}_1\overline{\mathfrak{y}_2} & \ldots & -\mathfrak{y}_1\overline{\mathfrak{y}_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\mathfrak{y}_{n-1}\overline{\mathfrak{y}_0} & -\mathfrak{y}_{n-1}\overline{\mathfrak{y}_1} & -\mathfrak{y}_{n-1}\overline{\mathfrak{y}_2} & \ldots & 1 - \mathfrak{y}_{n-1}\overline{\mathfrak{y}_{n-1}} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\mathfrak{B} := \begin{pmatrix} \mathfrak{y}_n & \mathfrak{y}_{n+1} & \ldots & \mathfrak{y}_{2n} \end{pmatrix} \tag{12}$$

und

$$\mathfrak{c} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ cR^n(1-|a_0|^2) \end{pmatrix} \tag{13}$$

mit

$$\mathfrak{y}_m := \begin{pmatrix} a_{m-n}R^{m-n} \\ a_{m-n+1}R^{m-n+1} \\ \vdots \\ a_m R^m \end{pmatrix} \tag{14}$$

für $m \in \mathbb{Z}$, *wobei*

$$a_j := 0 \tag{15}$$

für $j < 0$ *definiert werde.*

II. *Die negativen verallgemeinerten Potenzen werden gegeben durch*

$$\left[\frac{c}{z^n}\right]_\mu = (1-|\mu(0)|^2)\left(\frac{c}{z^n} + \left(\frac{1}{|z|^{2n}} - \frac{1}{R^{2n}}\right) h(z)\right) \tag{16}$$

mit

$$h(z) = \begin{cases} \frac{\mu(z)}{1-|\mu(z)|^2}\overline{c}z^n + \frac{|\mu(z)|^2}{1-|\mu(z)|^2}c\overline{z}^n & : \quad |z| < R, \\ 0 & : \quad |z| \geq R. \end{cases} \tag{17}$$

Anmerkung 1. *Für*

$$A_{n-1} := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

(I_n die $n \times n$-Einheitsmatrix) gilt

$$I_n - \overline{A_{n-1}}^T A_{n-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 1-\mathfrak{y}_0\overline{\mathfrak{y}_0} & -\mathfrak{y}_0\overline{\mathfrak{y}_1} & -\mathfrak{y}_0\overline{\mathfrak{y}_2} & \dots & -\mathfrak{y}_0\overline{\mathfrak{y}_{n-1}} \\ -\mathfrak{y}_1\overline{\mathfrak{y}_0} & 1-\mathfrak{y}_1\overline{\mathfrak{y}_1} & -\mathfrak{y}_1\overline{\mathfrak{y}_2} & \dots & -\mathfrak{y}_1\overline{\mathfrak{y}_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathfrak{y}_{n-1}\overline{\mathfrak{y}_0} & -\mathfrak{y}_{n-1}\overline{\mathfrak{y}_1} & -\mathfrak{y}_{n-1}\overline{\mathfrak{y}_2} & \dots & 1-\mathfrak{y}_{n-1}\overline{\mathfrak{y}_{n-1}} \end{pmatrix}^T.$$

Die Matrizen A_{n-1} treten bei Schur in [6] auf, in der Schur die Klasse der im Einheitskreis beschränkten analytischen Funktionen betrachtet, wobei er den Potenzreihen $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ die aus deren Koeffizienten *bestehende Matrix A_{n-1} zuordnet und deren Eigenschaften untersucht. Die in (12) genannte Matrix*

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 R & \dots & a_n R^n \\ a_1 R & a_2 R^2 & \dots & a_{n+1} R^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_n R^n & a_{n+1} R^{n+1} & \dots & a_{2n} R^{2n} \end{pmatrix}$$

ist eine Hankelsche Matrix, vergleiche z.B. [1], *S.310.*

Beweis zu I. Die rechte Seite von (8) werde mit $F_n(z)$ bezeichnet. Zunächst soll der Spezialfall $R = 1$ betrachtet werden, d.h. das System

$$f_{\overline{z}}(z) = \mu(z)\overline{f_z(z)},$$

wobei

$$\mu(z) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j z^j & : \quad |z| < 1, \\ 0 & : \quad |z| \geq 1 \end{cases}$$

sei. Im Folgenden soll nun $[cz^n]_\mu$ berechnet werden. Nach Satz 2 ist der Integraloperator U eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $A(D)$ auf $\mathcal{A}(D, \nu, \mu)$, d.h. es existiert genau eine analytische Funktion $p(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \alpha_j z^j$ mit

$$U\left(p(\cdot)\right)(z) = [cz^n]_\mu \,.$$

Nach (7) gilt für $|z| \geq 1$ und $g(z) = \alpha_m z^m$, $m > 0$

$$U(g(\cdot))(z) = \alpha_m z^m + \overline{\alpha} \frac{1}{z^m} \sum_{k=0}^{m-1} a_k z^k,$$

und nach Satz 1 ist der Punkt ∞ ein Punkt der Ordnung $-n$ von $[cz^n]_\mu$. Daher folgt, dass $\alpha_j = 0$ für $j > n$, also

$$U\left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j z^j\right) = [cz^n]_\mu \,,$$

d.h. die analytische Funktion $p(z)$ ist ein Polynom höchstens n-ten Grades. Nun soll $U(g(\cdot))(z)$ mittels der in (14) eingeführten Vektoren $\mathfrak{y}_m$ dargestellt werden. Nun gilt

$$\alpha_m z^m - \alpha_m \mu(z) \sum_{j=1}^{m} \overline{a_{m-j}} z^j - \overline{\alpha_m} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+m} z^j$$

$$=\alpha_m z^m - \alpha_m \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{y}_{j-1}\overline{\mathfrak{y}_{m-1}} z^j - \overline{\alpha_m} \sum_{j=0}^{n} a_{j+m} z^j + O(|z|^{n+1})$$

und damit erhält man für $U(g(\cdot))(z)$ nach (6)

$$\begin{aligned}
&U(g(\cdot))(z)\\
=&\frac{1}{1-|\mu(z)|^2}\left(\alpha_m z^m - \alpha_m \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{y}_{j-1}\overline{\mathfrak{y}_{m-1}} z^j - \overline{\alpha_m} \sum_{j=0}^{n} a_{j+m} z^j + O(|z|^{n+1})\right)\\
&+\frac{\mu(z)}{1-|\mu(z)|^2}\overline{\left(\alpha_m z^m - \alpha_m \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{y}_{j-1}\overline{\mathfrak{y}_{m-1}} z^j - \overline{\alpha_m} \sum_{j=0}^{n} a_{j+m} z^j + O(|z|^{n+1})\right)}.
\end{aligned}$$

Nun gilt noch die Identität

$$\alpha_0 = \frac{1}{1-|\mu(z)|^2}\left(\alpha_0 - \overline{\alpha_0}\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j\right) + \frac{\mu(z)}{1-|\mu(z)|^2}\overline{\left(\alpha_0 - \overline{\alpha_0}\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j\right)},$$

womit man schließlich für die am Anfang des Beweises definierte Funktion F_n erhält

$$\begin{aligned}
&F_n(z)\\
=&\frac{1}{1-|\mu(z)|^2}\left(\alpha_0 - \overline{\alpha_0}\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j\right) + \frac{\mu(z)}{1-|\mu(z)|^2}\overline{\left(\alpha_0 - \overline{\alpha_0}\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j\right)}\\
&+\frac{1}{1-|\mu(z)|^2}\sum_{m=1}^{n}\left(\alpha_m z^m - \alpha_m \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{y}_{j-1}\overline{\mathfrak{y}_{m-1}} z^j - \overline{\alpha_m} \sum_{j=0}^{n} a_{j+m} z^j + O(|z|^{n+1})\right)\\
&+\frac{\mu(z)}{1-|\mu(z)|^2}\overline{\sum_{m=1}^{n}\left(\alpha_m z^m - \alpha_m \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{y}_{j-1}\overline{\mathfrak{y}_{m-1}} z^j - \overline{\alpha_m} \sum_{j=0}^{n} a_{j+m} z^j + O(|z|^{n+1})\right)}\\
=&\frac{1}{1-|\mu(z)|^2}\left(\sum_{m=0}^{n}\alpha_m z^m - \sum_{j,m=1}^{n}\alpha_m \mathfrak{y}_{j-1}\overline{\mathfrak{y}_{m-1}} z^j - \sum_{j,m=0}^{n}\overline{\alpha_m} a_{j+m} z^j + O(|z|^{n+1})\right)\\
&+\frac{\mu(z)}{1-|\mu(z)|^2}\overline{\left(\sum_{m=0}^{n}\alpha_m z^m - \sum_{j,m=1}^{n}\alpha_m \mathfrak{y}_{j-1}\overline{\mathfrak{y}_{m-1}} z^j - \sum_{j,m=0}^{n}\overline{\alpha_m} a_{j+m} z^j + O(|z|^{n+1})\right)}.
\end{aligned}$$

Es sei

$$A_j := \alpha_j - \sum_{m=1}^{n}\alpha_m \mathfrak{y}_{j-1}\overline{\mathfrak{y}_{m-1}} - \sum_{m=0}^{n}\overline{\alpha_m} a_{j+m}$$

für $j = 0, 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
F_n(z) =&\frac{1}{1-|\mu(z)|^2}\left(\sum_{m=0}^{n} A_m z^m + O(|z|^{n+1})\right)\\
&+\frac{\mu(z)}{1-|\mu(z)|^2}\overline{\left(\sum_{m=0}^{n} A_m z^m + O(|z|^{n+1})\right)}.
\end{aligned}$$

Mittels vollständiger Induktion soll nun gezeigt werden, dass $A_j = 0$ gilt für $0 \leq j < n$. Auf Grund der asymptotischen Entwicklung der verallgemeinerten Potenzen im Punkt $z_0 = 0$ (siehe Satz 1) ergeben sich Bedingungen an die Koeffizienten A_j, aus denen dann die Konstanten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ berechnet werden können. Die Koeffizienten b_{ji} und c_{ji} seien definiert durch

$$\frac{1}{1-|\mu(z)|^2} =: \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{j} b_{ji} z^i \overline{z}^{j-i}, \qquad \frac{\mu(z)}{1-|\mu(z)|^2} =: \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{j} c_{ji} z^i \overline{z}^{j-i},$$

so ist z.B.

$$b_{00} = \frac{1}{1-|a_0|^2} \text{ und } c_{00} = \frac{a_0}{1-|a_0|^2}.$$

Somit gilt für das absolute Glied von F_n

$$b_{00}A_0 + c_{00}\overline{A_0} = 0$$

und daher

$$\frac{1}{1-|a_0|^2}A_0 + \frac{a_0}{1-|a_0|^2}\overline{A_0} = 0$$

also

$$A_0 = 0.$$

Es sei nun schon gezeigt, dass

$$A_0 = \cdots = A_j = 0$$

ist für $j < n-1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} F_n(z) =& \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{j} b_{ji} z^i \overline{z}^{j-i} \left(\sum_{m=j+1}^{n} A_m z^m + O(|z|^{n+1}) \right) \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{j} c_{ji} z^i \overline{z}^{j-i} \overline{\left(\sum_{m=j+1}^{n} A_m z^m + O(|z|^{n+1}) \right)} \\ =& \frac{1}{1-|a_0|^2} A_{j+1} z^{j+1} + \frac{a_0}{1-|a_0|^2} \overline{A_{j+1}}\,\overline{z^{j+1}} + O(|z|^{j+2}) \end{aligned}$$

und somit folgt

$$A_{j+1} = 0$$

für $0 \leq j < n$. Schließlich folgt wieder auf Grund der asymptotischen Entwicklung von $[cz^n]_\mu$, dass für den Koeffizienten von z^n gilt

$$b_{0,0}A_n = c$$

$$\Longrightarrow A_n = c(1-|a_0|^2).$$

Damit folgt also

$$A_j = \alpha_j - \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \mathfrak{y}_{j-1}\overline{\mathfrak{y}_{m-1}} - \sum_{m=0}^{n} \overline{\alpha_m} a_{j+m} = 0$$

für $j = 0, 1, \ldots, n-1$ und

$$A_n = \alpha_n - \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \mathfrak{y}_{n-1}\overline{\mathfrak{y}_{m-1}} - \sum_{m=0}^{n} \overline{\alpha_m} a_{n+m} = c(1-|a_0|^2),$$

und zusammengefasst erhält man somit als notwendige Bedingung

$$\mathfrak{A}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} - \mathfrak{B}\begin{pmatrix}\overline{\alpha_0}\\ \overline{\alpha_1}\\ \vdots\\ \overline{\alpha_n}\end{pmatrix} = \mathfrak{c}. \tag{18}$$

Wenn andererseits ein Vektor $\vec{\alpha}$ die Bedingung (18) erfüllt, so gilt $A_j = 0$ für $j = 0, 1, \ldots, n-1$ und $A_n = c(1-|a_0|^2)$, d.h. das mittels $\vec{\alpha}$ gebildete $F_n(z)$ ist gerade die gesuchte verallgemeinerte Potenz und somit ist (18) auch hinreichend. Nun ist $F_n(z) \in \mathcal{A}(D,\nu,\mu)$ und nach Satz 2 ist U eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $A(D)$ auf $\mathcal{A}(D,\nu,\mu)$, daher ist (18) eindeutig lösbar. Das System (18) ist sogar für jedes $\mathfrak{c}$ eindeutig lösbar, denn zerlegt man

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + i\mathfrak{A}_2 \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + i\mathfrak{B}_2$$

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1 + i\mathfrak{c}_2 \qquad \begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \vec{\alpha_1} + i\vec{\alpha_2},$$

wobei $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ und $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2 \in \mathbb{R}^{n+1}$ seien, so ist (18) äquivalent mit

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1 & -\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2\\ \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\alpha_1}\\ \vec{\alpha_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathfrak{c}_1\\ \mathfrak{c}_2\end{pmatrix}. \tag{19}$$

Wegen der eindeutigen Lösbarkeit von (18) mit speziellem $\mathfrak{c}$ wie in (13) muss

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1 & -\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2\\ \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1\end{pmatrix}$$

regulär sein. Demzufolge ist (18) für beliebiges $\mathfrak{c}$ eindeutig lösbar. Nun soll noch die Matrix $\mathfrak{A}$ genauer untersucht werden. Es gilt folgender

Hilfssatz 2. *Es sei die Funktion* $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ *analytisch und* $|g(z)| < 1$ *in* $\{z : |z| < 1\}$. *Dann ist die Matrix*

$$I_{n+1} - \begin{pmatrix} \overline{a_0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \overline{a_1} & \overline{a_0} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ \overline{a_n} & \overline{a_{n-1}} & & \dots & \overline{a_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

regulär, wobei I_{n+1} *die* $(n+1) \times (n+1)$*-Einheitsmatrix sei.*

Beweis. Schur ordnet in [6] der Potenzreihe $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ die Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & & \dots & a_0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

zu. Dazu konstruiert Schur zu der im Inneren des Einheitskreises regulären analytischen Funktion $g(z)$ Folgen von Konstanten $\gamma_0, \gamma_1, \dots$ und $\delta_{-1}, \delta_0, \dots$, indem Schur den kettenbruchartigen Algorithmus

$$g_0 = g$$

$$g_{j+1} = \frac{1}{x}\frac{g_j - \gamma_j}{1 - \overline{\gamma_j} g_j}, \qquad \gamma_j = g_j(0), \qquad j = 0, 1, 2, \dots$$

einführt ([6], §1). Die Konstanten δ_j mit $j = -1, 0, 1, \dots$ berechnen sich aus gewissen Determinanten (für Details siehe [6], §4). Ist nun $|g(z)| < 1$ für $|z| \leq 1$, so gilt für diese Konstanten $|\gamma_j| < 1$ und $\delta_{j-1} > 0$ mit $j = 0, 1, \dots$ ([6], §1 und §4). Damit folgt nach [6],§5,VII , dass die Matrix $I_{n+1} - \overline{A_n}^T A_n$ positiv definit ist, also insbesondere gilt $\det(I_{n+1} - \overline{A_n}' A_n) \neq 0$.
Da der Anti-Beltrami-Koeffizient μ sämtliche oben aufgeführten Bedingungen erfüllt, ist die Matrix $I_n - \overline{A_{n-1}}^T A_{n-1}$ regulär. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.
□

Nun gilt

$$I_n - \overline{A_{n-1}}^T A_{n-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\mathfrak{y}_0\overline{\mathfrak{y}_0} & -\mathfrak{y}_0\overline{\mathfrak{y}_1} & -\mathfrak{y}_0\overline{\mathfrak{y}_2} & \dots & -\mathfrak{y}_0\overline{\mathfrak{y}_{n-1}} \\ -\mathfrak{y}_1\overline{\mathfrak{y}_0} & 1-\mathfrak{y}_1\overline{\mathfrak{y}_1} & -\mathfrak{y}_1\overline{\mathfrak{y}_2} & \dots & -\mathfrak{y}_1\overline{\mathfrak{y}_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathfrak{y}_{n-1}\overline{\mathfrak{y}_0} & -\mathfrak{y}_{n-1}\overline{\mathfrak{y}_1} & -\mathfrak{y}_{n-1}\overline{\mathfrak{y}_2} & \dots & 1-\mathfrak{y}_{n-1}\overline{\mathfrak{y}_{n-1}} \end{pmatrix}^T,$$

somit ergibt sich auch die Regularität von $\mathfrak{A}$ und damit unmittelbar nach (18)

$$\left(I_{n+1} - \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}\overline{\mathfrak{A}}^{-1}\overline{\mathfrak{B}}\right)\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \left(\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{c} + \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}\overline{\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{c}}\right),$$

und da dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, folgt dass die Matrix $\left(I_{n+1} - \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}\overline{\mathfrak{A}}^{-1}\overline{\mathfrak{B}}\right)$ regulär ist, womit man

$$\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \left(I_{n+1} - \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}\overline{\mathfrak{A}}^{-1}\overline{\mathfrak{B}}\right)^{-1}\left(\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{c} + \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}\overline{\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{c}}\right)$$

und letztendlich $[cz^n]_\mu$ erhält.
Nun soll der Fall $R \in \mathbb{R}^+$ beliebig betrachtet werden. Es sei also das System

$$f_{\overline{z}}(z) = \mu(z)\overline{f_z(z)}$$

mit

$$\mu(z) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j z^j & : \quad |z| < R, \\ 0 & : \quad |z| \geq R \end{cases}$$

gegeben. Substituiert man nun $z = \zeta R$, dann erhält man wegen

$$f_{\overline{\zeta}}(\zeta) = f_{\overline{z}}(z)R \qquad\qquad f_\zeta(\zeta) = f_z(z)R$$

das System

$$f_{\overline{\zeta}}(\zeta) = \mu^*(\zeta)\overline{f_\zeta(\zeta)},$$

wobei

$$\mu^*(\zeta) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j^* \zeta^j & : \quad |\zeta| < 1, \\ 0 & : \quad |\zeta| \geq 1, \end{cases}$$

mit $a_j^* := a_j R^j$ sei. Transformiert man nun die zu diesem System gehörige verallgemeinerte Potenz $[cR^n\zeta^n]_{\mu^*}$ zurück, d.h. setzt man $\zeta = \frac{z}{R}$, so erhält man $F(z) := [cR^n(\frac{z}{R})^n]_{\mu^*}$ und es gilt

$$([cR^n\zeta^n]_{\mu^*})_{\overline{\zeta}} = F_{\overline{z}}(z)R \qquad ([cR^n\zeta^n]_{\mu^*})_{\zeta} = F_z(z)R$$

und daher

$$F_{\overline{z}}(z) = \mu(z)\overline{F_z}(z)$$

und weiterhin hat die Funktion $F(z)$ die asymptotische Entwicklung

$$F(z) = cz^n + \overline{c}\mu(0)\overline{z}^n + O(|z|^{n+1}).$$

Nun existiert nach Satz 1 genau eine Lösung mit diesen Eigenschaften, damit ist $F(z)$ die gesuchte verallgemeinerte Potenz. Damit ist Teil I. von Satz 3 bewiesen.
□

Anmerkung 2. *Im Beweisteil I. von Satz 3 wird gezeigt, dass die Matrizen*

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1 & -\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2 \\ \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1 \end{pmatrix} =: \mathcal{A}$$

des Gleichungssystems (19) und $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + i\mathfrak{A}_2$, definiert in (11), regulär sind. Im Allgemeinen folgt jedoch aus der Regularität von $\mathcal{A}$ nicht jene von $\mathfrak{A}$, wie das folgende einfache Beispiel zeigt.
Es sei

$$\mathfrak{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies bedeutet, dass es sich bei den Matrizen $\mathcal{A}$ des Gleichungssystems (19) und $\mathfrak{A}$, definiert in (11), um eine gewisse Unterklasse von Matrizen handelt.

Beweis zu II. Die rechte Seite von (16) werde mit $F_n(z)$ bezeichnet. Die Funktion F_n erfüllt die Differentialgleichung, denn für $|z| < R$ gilt

$$
\begin{aligned}
&\frac{F_{n\overline{z}}(z) - \mu(z)\overline{F_{nz}(z)}}{1 - |\mu(0)|^2} \\
&= -\frac{n}{z^n\overline{z}^{n+1}}\left(\frac{\mu(z)}{1-|\mu(z)|^2}\overline{c}z^n + \frac{|\mu(z)|^2}{1-|\mu(z)|^2}c\overline{z}^n\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{|z|^{2n}} - \frac{1}{R^{2n}}\right)\left(\frac{\mu(z)^2\overline{\mu(z)}'}{(1-|\mu(z)|^2)^2}\overline{c}z^n + \frac{\mu(z)\overline{\mu(z)}'}{1-|\mu(z)|^2}c\overline{z}^n\right. \\
&\qquad \left. + \frac{|\mu(z)|^2\mu(z)\overline{\mu(z)}'}{(1-|\mu(z)|^2)^2}c\overline{z}^n + \frac{|\mu(z)|^2}{1-|\mu(z)|^2}cn\overline{z}^{n-1}\right) \\
&\quad - \mu(z)\left(\overline{-\frac{cn}{z^{n+1}} - \frac{n}{z^{n+1}\overline{z}^n}\left(\frac{\mu(z)}{1-|\mu(z)|^2}\overline{c}z^n + \frac{|\mu(z)|^2}{1-|\mu(z)|^2}c\overline{z}^n\right)}\right. \\
&\qquad \overline{+\left(\frac{1}{|z|^{2n}} - \frac{1}{R^{2n}}\right)\left(\frac{\mu(z)'}{1-|\mu(z)|^2}\overline{c}z^n + \frac{|\mu(z)|^2\mu(z)'}{(1-|\mu(z)|^2)^2}\overline{c}z^n\right.} \\
&\qquad \left.\overline{\left. + \frac{\mu(z)}{1-|\mu(z)|^2}\overline{c}nz^{n-1} + \frac{\mu(z)'\overline{\mu(z)}}{1-|\mu(z)|^2}c\overline{z}^n + \frac{|\mu(z)|^2\mu(z)'\overline{\mu(z)}}{(1-|\mu(z)|^2)^2}c\overline{z}^n\right)}\right) \\
&=0,
\end{aligned}
$$

und für $|z| > R$ ist F_n analytisch, und somit ist auch dort die Differentialgleichung erfüllt. Weiterhin entnimmt man (16), dass F_n stetig ist. Die Funktion $F_n(z)$ besitzt auch die nach Satz 1 im Punkt $z_0 = 0$ erforderliche asymptotische Entwicklung, denn

$$F_n(z) = \frac{c}{z^n} + \frac{\overline{c}\mu(0)}{\overline{z}^n} + O(|z|^{-n+1})$$

und der Punkt ∞ ist ein Punkt der Ordnung $-(-n) = n$ von $f(z)$. Nun existiert nach Satz 1 genau eine Lösung mit diesen Eigenschaften, und damit ist Teil II. von Satz 3 bewiesen.
□

Beispiel 1. *Es sei*

$$\mu(z) = \begin{cases} a_m z^m & : |z| < 1, \\ 0 & : |z| \geq 1, \end{cases}$$

mit $m \in \mathbb{N}$. *Für die Koeffizienten des Polynoms*

$$P_2(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2,$$

das durch den Integraloperator U *auf* $[cz^2]_\mu$ *abgebildet wird, erhält man nach (10)* *für* $m = 0$

$$\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ c\end{pmatrix},$$

für $m = 1$

$$\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{c}{1-|a_1|^2}\end{pmatrix},$$

für $m = 2$

$$\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\overline{ca_2}}{1-|a_2|^2}\\ 0\\ \frac{c}{1-|a_2|^2}\end{pmatrix},$$

für $m = 3$

$$\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{\overline{c}a_3}{1-|a_3|^2}\\ \frac{c}{1-|a_3|^2}\end{pmatrix},$$

für $m = 4$

$$\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{c+\overline{c}a_4}{1-|a_4|^2}\end{pmatrix}$$

und für $m > 4$ *erhält man* $\mathfrak{A} = I_3$, $\mathfrak{B} = \mathbf{0}$ *und daher*

$$\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ c\end{pmatrix}.$$

Für $U(P_2(\cdot))(z)$ *erhält man nach Hilfssatz 1 z.B. für* $m = 3$

$$[cz^2]_\mu = \begin{cases} \frac{1}{1-|a_3 z^3|^2}\left(cz^2 - \overline{c}a_3|z|^4 z\right) & : |z| < 1, \\ \frac{\overline{c}a_3}{1-|a_3|^2} z + \frac{c}{1-|a_3|^2} z^2 & : |z| \geq 1 \end{cases}$$

und für $m > 4$

$$[cz^2]_\mu = \begin{cases} \frac{1}{1-|a_m z^m|^2}\left(cz^2 - \overline{c}a_m z^{m-2}\right) & \\ +\frac{a_m z^m}{1-|a_m z^m|^2}\overline{\left(cz^2 - \overline{c}a_m z^{m-2}\right)} & : |z| < 1, \\ cz^2 & : |z| \geq 1. \end{cases}$$

Speziell die schlichte Lösung wird gegeben durch

Folgerung 1. *Es sei*

$$\mu(z) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j & : \quad |z| < R, \\ 0 & : \quad |z| \geq R \end{cases}$$

und $\|\mu\|_{L_\infty} < 1$. *Weiterhin seien* A, B *beliebige, aber feste komplexe Konstanten mit* $A \neq 0$. *Dann ist die eindeutig bestimmte schlichte Anti-Beltrami-Lösung f(z) in* $\mathbb{C}$, *welche in* ∞ *eine Laurentreihenentwicklung*

$$f(z) = Az + B + \frac{d_1}{z} + \frac{d_2}{z^2} + \dots$$

besitzt, gegeben durch

$$f(z) = \begin{cases} Az + B + \frac{A(|z|^2 - R^2)\mu(z)(\overline{\mu(z)} - \overline{\mu(0)})}{(1-|\mu(z)|^2)\overline{z}} & \\ + \frac{\overline{A}(|z|^2 - R^2)(\mu(z) - \mu(0))}{(1-|\mu(z)|^2)z} + \overline{A}\mu(0)\overline{z} & : \quad |z| < R, \\ Az + B + \overline{A}\mu(0)\frac{R^2}{z} & : \quad |z| \geq R. \end{cases} \tag{21}$$

Anmerkung 3. *Es gilt*

$$f(z) = \left[\left(A - \frac{AR^2|a_1|^2}{(1-|a_0|^2)^2} - \frac{\overline{A}R^2 a_2}{1-|a_0|^2} - \frac{\overline{A}R^2\overline{a_0}a_1^2}{(1-|a_0|^2)^2} \right) z \right]_\mu$$
$$+ B - \frac{AR^2 a_0 \overline{a_1}}{1-|a_0|^2} - \frac{\overline{A}R^2 a_1}{1-|a_0|^2}.$$

Beweis. Die Funktion $f(z)$ ist Anti-Beltrami-Lösung, denn für $|z| > R$ ist $f(z)$ analytisch also ist dort die Differentialgleichung erfüllt, und für $|z| < R$ gilt

$$\begin{aligned} &f_{\overline{z}}(z) \\ =&\frac{Az\mu(z)(\overline{\mu(z)} - \overline{\mu(0)})}{(1-|\mu(z)|^2)\overline{z}} + \frac{A(|z|^2 - R^2)\overline{\mu'(z)}\mu(z)}{(1-|\mu(z)|^2)\overline{z}} \\ &+ \frac{A(|z|^2 - R^2)\mu(z)(\overline{\mu(z)} - \overline{\mu(0)})\overline{\mu'(z)}\mu(z)}{(1-|\mu(z)|^2)^2\overline{z}} - \frac{A(|z|^2 - R^2)\mu(z)(\overline{\mu(z)} - \overline{\mu(0)})}{(1-|\mu(z)|^2)\overline{z}^2} \\ &+ \frac{\overline{A}z(\mu(z) - \mu(0))}{(1-|\mu(z)|^2)z} + \frac{\overline{A}(|z|^2 - R^2)(\mu(z) - \mu(0))\overline{\mu'(z)}\mu(z)}{(1-|\mu(z)|^2)^2 z} + \overline{A}\mu(0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\mu(z)\overline{f_z(z)} \\ =&\overline{A}\mu(z) + \frac{\overline{A}z|\mu(z)|^2(\mu(z) - \mu(0))}{(1-|\mu(z)|^2)z} + \frac{\overline{A}(|z|^2 - R^2)\overline{\mu'(z)}\mu(z)(\mu(z) - \mu(0))}{(1-|\mu(z)|^2)z} \\ &+ \frac{\overline{A}(|z|^2 - R^2)|\mu(z)|^2\overline{\mu'(z)}\mu(z)(\mu(z) - \mu(0))}{(1-|\mu(z)|^2)^2 z} + \frac{Az(\overline{\mu(z)} - \overline{\mu(0)})\mu(z)}{(1-|\mu(z)|^2)\overline{z}} \end{aligned}$$

$$+\frac{A(|z|^2-R^2)\overline{\mu'(z)}\mu(z)}{(1-|\mu(z)|^2)\overline{z}}+\frac{A(|z|^2-R^2)(\overline{\mu(z)}-\overline{\mu(0)})\overline{\mu'(z)}\mu^2(z)}{(1-|\mu(z)|^2)^2\overline{z}}$$
$$-\frac{A(|z|^2-R^2)(\overline{\mu(z)}-\overline{\mu(0)})\mu(z)}{(1-|\mu(z)|^2)\overline{z}^2}$$

und damit nach leichter Rechnung

$$f_{\overline{z}}(z)-\mu(z)\overline{f_z(z)}=0.$$

Die Stetigkeit von $f(z)$ ist (21) unmittelbar zu entnehmen. Des Weiteren geht aus (21) unmittelbar die geforderte Laurententwicklung für $f(z)$ in ∞ hervor. Die Schlichtheit folgt nun daraus, dass nach Darstellungstheorem f die Gestalt $f = F\circ\chi$ hat, wobei χ eine quasikonforme Abbildung von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}$ und F eine in $\mathbb{C}$ analytische Funktion ist. Nun hat F wegen der geforderten Laurentreihenentwicklung und dem Argumentprinzip nur in ∞ einen einfachen Pol, d.h. ist also ganz-linear und demzufolge schlicht. □

2.2. *Anti-analytische Koeffizienten.* Im Folgenden werden nun für einen in $\{z : |z| < R\}$ anti-analytischen Koeffizienten μ, $\mu(z)\equiv 0$ außerhalb, die verallgemeinerten Potenzen ermittelt. Sie werden gegeben durch

Satz 4. *Es sei*

$$\mu(z)=\begin{cases}\sum\limits_{j=0}^{\infty}\overline{a_j z^j} & : \ |z|<R,\\ 0 & : \ |z|\geq R,\end{cases}$$

$\|\mu\|_{L_\infty}<1$, $n\in\mathbb{N}$, $c\in\mathbb{C}$ *und* ξ *beliebig mit* $|\xi|<R$.

I. *Dann sind die positiven verallgemeinerten Potenzen gegeben durch*

$$[c(z-\xi)^n]_\mu$$
$$=c(z-\xi)^n+\overline{c}\begin{cases}\overline{\int\limits_0^z\overline{\mu(\zeta)}n(\zeta-\xi)^{n-1}\,d\zeta} & : \ |z|<R,\\ \overline{\int\limits_0^{\frac{R^2}{\overline{z}}}\overline{\mu(\zeta)}n(\zeta-\xi)^{n-1}\,d\zeta} & : \ |z|\geq R.\end{cases}\tag{22}$$

II. *Die negativen verallgemeinerten Potenzen werden gegeben durch*

$$\left[\frac{c}{z^n}\right]_\mu=\frac{c}{z^n}\tag{23}$$

$$+\begin{cases} \sum\limits_{j=0,j\neq n}^{\infty} b_j \frac{\overline{z}^{j-n}}{(j-n)R^{j-n}} - \sum\limits_{j=0,j\neq n}^{2n-1} b_j \frac{R^{j-n}}{(j-n)z^{j-n}} + b_n \ln \frac{|z|^2}{R^2} & : \quad |z| < R, \\ \sum\limits_{j=2n}^{\infty} b_j \frac{R^{j-n}}{(j-n)z^{j-n}} & : \quad |z| \geq R, \end{cases}$$

wobei $b_0 = -n\frac{\overline{c}}{R^n}\overline{a_0}$ *ist, und für die übrigen Koeffizienten* $b_1, b_2, \ldots$ *gilt*

$$\mathfrak{b} = -\left(I_{2n-1} - A\overline{A}\right)^{-1}\left(A\overline{\mathfrak{a}} + \mathfrak{a}\right), \tag{24}$$

dabei sei I_{2n-1} *die* $(2n-1)\times(2n-1)$*-Einheitsmatrix,*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \overline{a_0} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \overline{a_0} & \overline{a_1 R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \overline{a_0} & \ldots & \overline{a_{2n-5}R^{2n-5}} & \overline{a_{2n-4}R^{2n-4}} & \overline{a_{2n-3}R^{2n-3}} \\ \overline{a_0} & \overline{a_1 R} & \ldots & \overline{a_{2n-4}R^{2n-4}} & \overline{a_{2n-3}R^{2n-3}} & \overline{a_{2n-2}R^{2n-2}} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2n-2} \\ b_{2n-1} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{a} := n\frac{\overline{c}}{R^n}\begin{pmatrix} \overline{a_1 R} \\ \overline{a_2 R^2} \\ \vdots \\ \overline{a_{2n-2}R^{2n-2}} \\ \overline{a_{2n-1}R^{2n-1}} \end{pmatrix} \tag{25}$$

und

$$\begin{pmatrix} b_{2n} \\ b_{2n+1} \\ b_{2n+2} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a_0} & \overline{a_1}R & \ldots & \overline{a_{2n-3}}R^{2n-3} & \overline{a_{2n-2}}R^{2n-2} & \overline{a_{2n-1}}R^{2n-1} \\ \overline{a_1}R & \overline{a_2}R^2 & \ldots & \overline{a_{2n-2}}R^{2n-2} & \overline{a_{2n-1}}R^{2n-1} & \overline{a_{2n}}R^{2n} \\ \overline{a_2}R^2 & \overline{a_3}R^3 & \ldots & \overline{a_{2n-1}}R^{2n-1} & \overline{a_{2n}}R^{2n} & \overline{a_{2n+1}}R^{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} \overline{b_0} \\ \overline{b_1} \\ \overline{b_2} \\ \overline{b_3} \\ \vdots \\ \overline{b_{2n-2}} \\ \overline{b_{2n-1}} \end{pmatrix} - n\frac{\overline{c}}{R^n}\begin{pmatrix} \overline{a_{2n}}R^{2n} \\ \overline{a_{2n+1}}R^{2n+1} \\ \overline{a_{2n+2}}R^{2n+2} \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Beweis zu I. Die rechte Seite von (22) werde mit $F_n(z)$ bezeichnet. Die Funktion F_n erfüllt die Differentialgleichung, was für $|z| \geq R$ offensichtlich ist, und für $|z| < R$ gilt

$$F_{n\overline{z}}(z) - \mu(z)\overline{F_{nz}(z)} = \overline{c}\mu(z)n\overline{(z-\xi)}^{n-1} - \mu(z)\overline{c}n\overline{(z-\xi)}^{n-1} = 0.$$

Die Stetigkeit von F_n ist (22) einfach zu entnehmen. Entwickelt man $\mu(z)$ im Punkt ξ, so erhält man

$$\mu(z-\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{(j)}(\xi) \frac{\overline{(z-\xi)}^j}{j!}$$

in einer Umgebung $U \subset \{z : \ |z| < R\}$ des Punktes ξ. Die Funktion F_n hat in ξ demzufolge die asymptotische Entwicklung

$$F_n(z) = c(z-z_0)^n + \mu(\xi)\overline{c}\overline{(z-\xi)}^n + O\left(\ |z-\xi|^{n+1}\right)$$

und der Punkt ∞ ist ein Punkt der Ordnung -n von F_n. Nun existiert nach Satz 1 genau eine Lösung mit diesen Eigenschaften, daher folgt die Behauptung. Damit ist Teil I. von Satz 4 bewiesen. □

Beweis zu II. Die rechte Seite von (23) werde mit $F_n(z)$ bezeichnet. Zunächst soll der Spezialfall $R = 1$ betrachtet werden. Die Funktion F_n erfüllt die Differentialgleichung, falls für $|z| < 1$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= F_{n\overline{z}}(z) - \mu(z)\overline{F_{nz}(z)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} b_j \overline{z}^{j-n-1} - \mu(z)\left(-\frac{\overline{c}n}{\overline{z}^{n+1}} + \sum_{j=0}^{2n-1} \overline{b_j} \frac{1}{\overline{z}^{j-n+1}}\right), \end{aligned}$$

d.h. es muss gelten

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j \overline{z}^{j-1} = \mu(z)\left(-\frac{\overline{c}n}{\overline{z}} + \sum_{j=0}^{2n-1} \overline{b_{2n-1-j}}\overline{z}^j\right).$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert nun gerade $b_0 = -n\overline{ca_0}$,

$$\mathfrak{b} = A\overline{\mathfrak{b}} - \mathfrak{a} \tag{27}$$

und

$$\begin{pmatrix} b_{2n} \\ b_{2n+1} \\ b_{2n+2} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a_0} & \overline{a_1} & \dots & \overline{a_{2n-3}} & \overline{a_{2n-2}} & \overline{a_{2n-1}} \\ \overline{a_1} & \overline{a_2} & \dots & \overline{a_{2n-2}} & \overline{a_{2n-1}} & \overline{a_{2n}} \\ \overline{a_2} & \overline{a_3} & \dots & \overline{a_{2n-1}} & \overline{a_{2n}} & \overline{a_{2n+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{b_0} \\ \overline{b_1} \\ \vdots \\ \overline{b_{2n-1}} \end{pmatrix} - n\frac{\overline{c}}{R^n} \begin{pmatrix} \overline{a_{2n}} \\ \overline{a_{2n+1}} \\ \overline{a_{2n+2}} \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{28}$$

mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und A wie in (25). Aus (27) folgt

$$(I_{2n-1} - A\overline{A})\mathfrak{b} = -A\overline{\mathfrak{a}} - \mathfrak{a}.$$

Nun gilt nach Hilfssatz 2, dass die Matrix $I_{2n-1} - A\overline{A}$ regulär ist, denn es gilt $I_{2n-1} - A\overline{A} = I_{2n-1} - \overline{A_{2n-2}}^T A_{2n-2}$. Daher folgt

$$\mathfrak{b} = -(I_{2n-1} - A\overline{A})^{-1}(A\overline{\mathfrak{a}} + \mathfrak{a}), \tag{29}$$

also ist die Differentialgleichung erfüllt, falls (29) gilt. Für $|z| > 1$ ist offensichtlich, dass die Differentialgleichung erfüllt ist. Die Stetigkeit von F_n (anfangs des Beweises definiert) ist (23) einfach zu entnehmen. Die Funktion $F_n(z)$ besitzt auch die nach Satz 1 im Punkt $z_0 = 0$ erforderliche asymptotische Entwicklung, denn

$$F_n(z) = \frac{c}{z^n} + \frac{\overline{c}\mu(0)}{\overline{z}^n} + O(|z|^{-n+\alpha})$$

mit $\alpha > 0$ und der Punkt ∞ ist ein Punkt der Ordnung $-(-n) = n$ von F_n.
Die Betrachtungen zum Fall $R \in \mathbb{R}^+$ verlaufen analog zu denen im Beweisteil I. des Satzes 3. Man transformiert nämlich $\left[\frac{c}{R^n\zeta^n}\right]_{\mu^*}$ zurück, und erhält die Funktion $F(z) := \left[\frac{c}{R^n(\frac{z}{R})^n}\right]_{\mu^*}$, die wieder die Differentialgleichung erfüllt und außerdem die asymptotische Entwicklung

$$F(z) = \frac{c}{z^n} + \frac{\overline{c}\mu(0)}{\overline{z}^n} + O(|z|^{-n+\alpha})$$

besitzt. Nun existiert nach Satz 1 genau eine Lösung mit diesen Eigenschaften, somit ist F die gesuchte verallgemeinerte Potenz. Damit ist Teil II. von Satz 4 bewiesen.
□

Anmerkung 4. *Berechnet man $U\left(g(\cdot)\right)(z)$, $g(z) = cz^n$ mit $n \in \mathbb{N}$, μ wie in Satz 4, so erhält man die rechte Seite von (22), d.h. der Operator U bildet die Potenz cz^n für diese μ gerade auf die verallgemeinerte Potenz $[cz^n]_\mu$ ab.*

Anmerkung 5. *In Verallgemeinerung einer Eigenschaft bei gewöhnlichen Potenzen gilt für $n \in \mathbb{N}$ und μ wie in Satz 4*

$$\frac{\partial\left([c(z-\xi)^n]_\mu\right)}{\partial\xi} + \frac{\partial\left([c(z-\xi)^n]_\mu\right)}{\partial\overline{\xi}} = -n[c(z-\xi)^{n-1}]_\mu,$$

was sich unmittelbar durch Einsetzen ergibt.

Speziell die schlichte Lösung wird gegeben durch

Folgerung 2. *Es sei μ anti-analytisch für $|z| < R$, $\mu(z) \equiv 0$ für $|z| \geq R$ und $\|\mu\|_{L_\infty} < 1$. Weiterhin seien A und B beliebige, aber feste komplexe Konstanten mit $A \neq 0$. Dann ist die eindeutig bestimmte schlichte Anti-Beltrami-Lösung f(z) in $\mathbb{C}$, welche in ∞ eine Laurentreihenentwicklung*

$$f(z) = Az + B + \frac{d_1}{z} + \frac{d_2}{z^2} + \ldots$$

besitzt, gegeben durch

$$f(z) = Az + B + \overline{A} \begin{cases} \overline{\int\limits_0^z \overline{\mu(\zeta)} d\zeta} & : \ |z| < R, \\ \overline{\int\limits_0^{\frac{R^2}{\overline{z}}} \overline{\mu(\zeta)} d\zeta} & : \ |z| \geq R. \end{cases} \tag{30}$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 4.
□

Anmerkung 6. *Es gilt außerdem*

$$f(z) = Az + B + \overline{A} P\mu(z),$$

wobei der Integraloperator P die zweidimensionale Cauchy-Transformation ist. Die Beziehung erhält man, wenn man $f(z)$ mittels

$$f(z) = Az + B + \frac{1}{\pi} \iint \left(\Phi_1(t,z)A + \Phi_2(t,z)\overline{A} \right) d\sigma_t$$

([2],*IV.2.1*) *bestimmt. Während der Rechnung ergibt sich u.a., dass*

$$\frac{1}{\pi} \iint \Phi_1(t,z) \sigma_t = 0$$

gilt. Die Richtigkeit der Aussage überprüft man, indem man einfach $P\mu(z)$ (mit Hilfe von [4], 4.2*) berechnet.*

Beispiel 2. *Für $[cz^{-1}]_\mu$, μ wie in Satz 4, berechnet man folgende Koeffizienten:*

$$b_0 = -\frac{\overline{c}}{R}\overline{a_0}$$

$$b_1 = -\frac{\overline{ca_1} + c\overline{a_0}a_1}{1 - |a_0|^2}$$

und für $j = 2, 3, \ldots$

$$b_j = -\overline{c}R^{j-1}\overline{a_j} - \frac{ca_1 + \overline{c}a_0\overline{a_1}}{1 - |a_0|^2}\overline{a_{j-1}}R^{j-1} - ca_0 R^{j-3}\overline{a_{j-2}}.$$

Literatur

[1] F.R.Gantmacher. Matrizenrechnung Teil I. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, (1958).

[2] H.Renelt. Quasikonforme Abbildungen und elliptische Systeme erster Ordnung in der Ebene. Teubner-Texte zur Mathematik, Band 46, Leipzig, (1982).(englische Übersetzung bei Wiley 1988)

[3] H.Renelt. Generalized Powers in the Theory of (ν, μ)-Solutions. Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska, Lublin-Polonia, A 40(22):217-235, (1986).

[4] K.Rödel. Konstruktive Methoden zur Berechnung von verallgemeinerten Potenzen. Diplomarbeit, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, (1997).

[5] K.Rödel. Fundamentallösungen für Cauchy-Riemann Systeme. Reports of the Institute of Analysis, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Report No. 07, (2000).

[6] I.Schur. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. Journal für Mathematik (Crelle), 147, 205-232, (1917).