Fundamentallösungen für Cauchy-Riemann-Systeme

Kristian Rödel

Zu Cauchy-Riemann-Systemen existieren gewisse globale Fundamentallösungen, die für die Darstellung der Lösung dieser Systeme (z.B. durch verallgemeinerte Cauchysche, Schwarzsche und Poissonsche Integralformeln) eine wichtige Rolle spielen. Diese Fundamentallösungen stehen darüber hinaus im engen Zusammenhang mit Kernen von Integraloperatoren, die analytische Funktionen in Lösungen Cauchy-Riemannscher Systeme transformieren. Im Fall des Beltrami-Systems, d.h. eines komplex-linearen Systems, reduziert sich die Frage nach diesen Fundamentallösungen auf die Frage nach einer in $\mathbb{C}$ schlichten Lösung. Für Anti-Beltrami-Systeme, die nur reell-lineare Cauchy-Riemann-Systeme sind, liegen die Verhältnisse wesentlich schwieriger. Es wird hier aber gezeigt, dass für gewisse Klassen solcher Cauchy-Riemann-Systeme (zu deren Lösungen u.a. harmonische Abbildungen gehören) die Fundamentallösungen und Kerne explizit konstruiert werden können.

1. **Einleitung.** Es sei ein Cauchy-Riemann-System, d.h. ein gleichmäßig elliptisches System der Form

$$f_{\overline{z}} = \nu(z) f_z + \mu(z)\overline{f_z} \tag{1}$$

gegeben, wobei die Koeffizienten ν, μ die Bedingungen

$$supp(|\nu| + |\mu|) =: \mathcal{K} \Subset \mathbb{C}, \quad \nu, \mu \in L_\infty, \ \| |\nu| + |\mu| \|_{L_\infty} \leq const =: k < 1 \tag{2}$$

erfüllen. Dabei ist das System

$$f_{\overline{z}} = \nu(z) f_z \tag{3}$$

ein Beltrami-System, wogegen das System

$$f_{\overline{z}} = \mu(z)\overline{f_z} \tag{4}$$

Anti-Beltrami-System heißen soll. Die Fundamentallösung des Systems (1) sei wie folgt definiert.

Definition 1 ([2], IV.3.3)**.** *Für die Koeffizienten ν und μ gelte (2). $H(t, z, \nu, \mu)$ heiße Fundamentallösung des (ν, μ)-Systems, wenn gilt:*

(I) *Für beliebiges, aber festes $z \in \mathbb{C}$ ist $r_\infty(t, z) := H(t, z, \nu, \mu) - \log(t - z)$ als Funktion von t in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ eindeutig (erklärbar) und stetig,*

(II) *für z wie in (I) gehört $r_\infty(t,z)$ als Funktion von t zu $L_r(K)$ für jedes endliche $r \geq 1$ und jede beschränkte messbare Menge K,*

(III) *für z wie in (I) ist $H(t,z,\nu,\mu)$ eine (ν,μ)-Lösung in (jedem einfach zusammenhängenden Teilgebiet von) $\mathbb{C}\setminus\{z\}$,*

(IV) *für z wie in (I) gilt $\lim\limits_{t\to\infty} r_\infty(t,z) = 0$.*

$H(t,z,\nu,\mu)$ ist durch die Eigenschaften (I)-(IV) eindeutig bestimmt.

Die Fundamentallösungen stehen im engen Zusammenhang mit den Kernen $\Phi_1(t,z)$ und $\Phi_2(t,z)$, die durch nachfolgenden Satz definiert sind. Dabei sei der Kürze halber

$$\begin{aligned} B_p(D) &= W^1_{p,loc}(D)\cap C(D), \\ A(D) &= \{f \ : \ f \text{ ist analytisch in } D\}, \\ \mathfrak{A}(D,\nu,\mu) &= \{f \ : \ f \text{ ist } (\nu,\mu)\text{-Lösung in } D\} \end{aligned}$$

und D ein Gebiet $\subseteq \mathbb{C}$.

Satz 1 ([2], IV.1.9)**.** *Die Funktionen ν und μ mögen die Bedingung (2) erfüllen. Es gibt zwei f.ü. in $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ definierte Funktionen $\Phi_1(t,z)$, $\Phi_2(t,z)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(I) *Es sind $\Phi_1(t,z)$, $\Phi_2(t,z) \in L_q$ als Funktionen von t bei beliebigem, aber festem $z\in\mathbb{C}$ für jedes $q\in[1,2)$; $supp(|\Phi_1(\cdot,z)|+|\Phi_2(\cdot,z)|)$ ist enthalten in $\mathcal{K}$.*

(II) *Es sei für alle $g\in B_p(D)$ mit $p>2$, $\mathcal{K}\Subset D$*

$$Ug(z) := g(z) + \frac{1}{\pi}\iint (\Phi_1(t,z)g_t + \Phi_2(t,z)\overline{g_t})\,d\sigma_t$$

(hierbei wird $\Phi_1(t,z)f(t) = \Phi_2(t,z)f(t) = 0$ gesetzt $\forall t\notin\mathcal{K}$ und jede Funktion f; Integrale, bei denen kein Integrationsbereich angegeben ist, sind über den gesamten Träger des Integranden zu berechnen). Wenn $g\in B_p(D)$ auf einer offen Teilmenge $D'\subseteq D$ analytisch ist, so ist Ug eine (ν,μ)-Lösung in D'. Insbesondere ist U eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $A(D)$ auf $\mathfrak{A}(D,\nu,\mu)$.

(III) *$\Phi_1(t,z)$, $\Phi_2(t,z)$ mit den in (1), (2) genannten Eigenschaften sind für beliebiges, aber festes $z\in\mathbb{C}$ als Elemente des L_q eindeutig bestimmt.*

Zwischen den Kernen $\Phi_1(t,z)$ und $\Phi_2(t,z)$ und den Fundamentallösungen besteht folgender einfacher Zusammenhang ([2], IV.3.5):

$$\begin{aligned} \Phi_1(t,z) &= -\frac{1}{2}(H(t,z,\nu,\overline{\mu}) + H(t,z,\nu,-\overline{\mu}))_{\overline{t}}\ , \\ \Phi_2(t,z) &= -\frac{1}{2}\overline{(H(t,z,\nu,\overline{\mu}) - H(t,z,\nu,-\overline{\mu}))_{\overline{t}}}\ . \end{aligned} \tag{5}$$

2. **Fundamentallösungen und Kerne zu Beltrami-Systemen.** Aufgrund des folgenden Satzes (für Details siehe [3]) reduziert sich im Fall des Beltrami-Systems die Frage nach deren Fundamentallösungen und Kernen auf die Frage nach einer in $\mathbb{C}$ schlichten Lösung.

Satz 2. *Es sei ein Beltrami-System (3) gegeben, wobei ν einen kompakten Träger habe. Dann ist die Fundamentallösung $H(t, z, \nu, 0)$ gegeben durch*

$$H(t, z, \nu, 0) = \log(f(t) - f(z)).$$

Dabei sei f die eindeutig bestimmte, in $\mathbb{C}$ schlichte Lösung von (3), die in ∞ eine Laurentreihenentwicklung

$$f(z) = \quad z + B + \tfrac{d_1}{z} + \tfrac{d_2}{z^2} + \dots$$

besitzt.

Nachfolgend sollen nun zu bestimmten Klassen von Beltrami -Koeffizienten die schlichten Lösungen bestimmt werden. Im Fall eines für $|z| < R$ anti-analytischen Koeffizienten ν, d.h. $\overline{\nu}$ ist dort analytisch, und $\nu(z) = 0$ für $|z| \geq R$, wobei R eine gegebene positive Konstante sei, ist die schlichte Lösung durch folgenden Satz gegeben.

Satz 3. *Es sei ν anti-analytisch für $|z| < R$, $\nu(z) \equiv 0$ für $|z| \geq R$ und $\|\nu\|_{L_\infty} < 1$. Weiterhin seien A, B beliebige Konstanten aus $\mathbb{C}$ mit $A \neq 0$. Dann ist die eindeutig bestimmte schlichte Beltrami-Lösung f(z) in $\mathbb{C}$, welche in ∞ eine Laurentreihenentwicklung*

$$f(z) = \quad Az + B + \tfrac{d_1}{z} + \tfrac{d_2}{z^2} + \dots$$

besitzt, gegeben durch

$$f(z) = \begin{cases} Az + B + A\overline{\int_0^z \overline{\nu(\zeta)} d\zeta} & : \quad |z| < R, \\ Az + B + A\overline{\int_0^{\frac{R^2}{\overline{z}}} \overline{\nu(\zeta)} d\zeta} & : \quad |z| \geq R. \end{cases} \tag{6}$$

Beweis. Die Funktion f ist Beltrami-Lösung in $\mathbb{C}$, denn für $|z| < R$ gilt

$$f_{\overline{z}}(z) - \nu(z) f_z(z) = A\nu(z) - \nu(z)A = 0,$$

und für $|z| > R$ ist $f(z)$ analytisch, also ist auch dort die Differentialgleichung erfüllt. Weiterhin ist (6) unmittelbar die Stetigkeit zu entnehmen. Des Weiteren hat $f(z)$ in ∞ die geforderte Laurententwicklung. Sei nämlich $\nu(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \overline{a_j z^j}$. Dann gilt

$$Az + B + A\overline{\int\limits_0^{\frac{R^2}{\bar{z}}} \overline{\nu(\zeta)}d\zeta} = Az + B + A\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\overline{a_j}}{j+1}\frac{R^{2(j+1)}}{z^{j+1}}.$$

Die Schlichtheit folgt nun daraus, dass f nach Darstellungstheorem die Gestalt $f = F \circ \chi$ hat, wobei χ eine quasikonforme Abbildung von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}$ und F eine in $\mathbb{C}$ analytische Funktion ist. Nun hat F wegen der geforderten Laurentreihenentwicklung und dem Argumentprinzip nur in ∞ einen einfachen Pol, d.h. ist also ganz-linear und demzufolge schlicht.
$\square$

Mit Hilfe der Sätze 2 und 3 lassen sich nun leicht die zugehörige Fundamentallösung ermitteln.

Satz 4. *Es sei ν anti-analytisch für $|z| < R$, $\nu(z) \equiv 0$ für $|z| \geq R$ und $\|\nu\|_{L_\infty} < 1$. Dann ist $H(t, z, \nu, 0)$ gegeben durch*

$$H(t,z,\nu,0) =$$
$$\begin{cases} \log\left(t - z + \left(\overline{\int\limits_0^t \overline{\nu(\zeta)}d\zeta - \int\limits_0^z \overline{\nu(\zeta)}d\zeta}\right)\right) & : \ |t| < R, |z| < R, \\ \log\left(t - z + \left(\overline{\int\limits_0^t \overline{\nu(\zeta)}d\zeta - \int\limits_0^{\frac{R^2}{\bar{z}}} \overline{\nu(\zeta)}d\zeta}\right)\right) & : \ |t| < R, |z| \geq R, \\ \log\left(t - z + \left(\overline{\int\limits_0^{\frac{R^2}{\bar{t}}} \overline{\nu(\zeta)}d\zeta - \int\limits_0^z \overline{\nu(\zeta)}d\zeta}\right)\right) & : \ |t| \geq R, |z| < R, \\ \log\left(t - z + \left(\overline{\int\limits_0^{\frac{R^2}{\bar{t}}} \overline{\nu(\zeta)}d\zeta - \int\limits_0^{\frac{R^2}{\bar{z}}} \overline{\nu(\zeta)}d\zeta}\right)\right) & : \ |t| \geq R, |z| \geq R. \end{cases}$$

Mittels (5) lassen sich nun auch die Kerne einfach angeben.

Satz 5. *Es sei* ν *anti-analytisch für* $|z| < R$, $\nu(z) \equiv 0$ *für* $|z| \geq R$ *und* $\|\nu\|_{L_\infty} < 1$. *Dann ist* $\Phi_1(t,z)$ *gegeben durch*

$$\Phi_1(t,z) = \begin{cases} -\dfrac{\nu(t)}{t-z+\left(\int\limits_0^t \overline{\nu(\zeta)}d\zeta - \int\limits_0^z \overline{\nu(\zeta)}d\zeta\right)} & : \quad |z| < R, \\ -\dfrac{\nu(t)}{t-z+\left(\int\limits_0^t \overline{\nu(\zeta)}d\zeta - \int\limits_0^{\frac{R^2}{z}} \overline{\nu(\zeta)}d\zeta\right)} & : \quad |z| \geq R \end{cases}$$

und

$$\Phi_2(t,z) \equiv 0.$$

In [1] wird der quasikonforme Homöomorphismus von $\overline{\mathbb{C}}$ auf sich bestimmt mit der komplexen Dilatation

$$\nu(z) = \begin{cases} mz^a\overline{z}^b & : \ |z| < 1, \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases}$$

mit reellem m, das $|m| < 1$ erfüllt, und $(a+b) \in \mathbb{N}$. Man entnimmt [1] u.a. folgendes

Beispiel 1. *Es sei* $\nu(z) = \lambda z$ *für* $|z| < R$, $\nu(z) \equiv 0$ *für* $|z| \geq R$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\nu\|_{L_\infty} < 1$. *Weiterhin seien* A, B *beliebige Konstanten aus* $\mathbb{C}$ *mit* $A \neq 0$. *Dann ist die eindeutig bestimmte schlichte Beltrami-Lösung f(z) in* $\mathbb{C}$, *welche in* ∞ *eine Laurentreihenentwicklung*

$$f(z) = \quad Az + B + \tfrac{d_1}{z} + \tfrac{d_2}{z^2} + \ldots$$

besitzt, gegeben durch

$$\begin{cases} Aze^{\lambda\overline{z}} + B & : \ |z| < R \\ Aze^{\lambda\frac{R^2}{z}} + B & : \ |z| \geq R \end{cases}.$$

Des Weiteren sei nun $\nu(z) = z^2h(|z|)$ für $|z| < R$, $\nu(z) \equiv 0$ für $|z| \geq R$. Wählt man für die Lösung $f(z)$ den Ansatz $f(z) = zg(|z|)$ mit einer rotationssymmetrischen Funktion g und setzt dieses $f(z)$ in (3) ein, so erhält man für $|z| < R$

$$\begin{aligned} zg'(|z|)\frac{z}{2|z|} &= z^2h(|z|)\left(g(|z|) + zg'(|z|)\frac{|z|}{2z}\right) \\ &\text{und daher} \\ g'(|z|)(1-\nu(|z|))|z| &= 2\nu(|z|)g(|z|) \end{aligned}$$

und somit folgenden

Satz 6. *Es sei* $\nu(z) = z^2 h(|z|)$ *für* $|z| < R$, $\nu(z) \equiv 0$ *für* $|z| \geq R$ *und* $\|\nu\|_{L_\infty} < 1$. *Dabei sei* h *eine rotationssymmetrische und stetige Funktion. Weiterhin seien* A *und* B *beliebige Konstanten aus* $\mathbb{C}$ *mit* $A \neq 0$. *Dann ist die eindeutig bestimmte, schlichte Beltrami-Lösung* $f(z)$ *in* $\mathbb{C}$, *welche in* ∞ *eine Laurentreihenentwicklung*

$$f(z) = \quad Az + B + \tfrac{d_1}{z} + \tfrac{d_2}{z^2} + \ldots$$

besitzt, gegeben durch

$$\begin{cases} Aze^{\int\limits_0^{|z|} \frac{2\nu(x)}{(1-\nu(x))x}dx} + B & : \quad |z| < R \\ Aze^{\int\limits_0^{R} \frac{2\nu(x)}{(1-\nu(x))x}dx} + B & : \quad |z| \geq R \quad . \end{cases} \tag{7}$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 3.
□

3. **Fundamentallösungen und Kerne zu Anti-Beltrami-Systemen.** Es sollen nun Fundamentallösungen und Kerne zu Anti-Beltrami-Systemen konstruiert werden, d.h. zu Systemen der Gestalt (4)

$$f_{\overline{z}}(z) = \mu\overline{f_z(z)},$$

die außerdem noch (2) erfüllen.

Für den Koeffizienten μ wird nun angenommen, dass $\mu(t)$ analytisch bzw. anti-analytisch für $|z| < R$ und $\mu(t) \equiv 0$ für $|z| \geq R$, wobei R eine gegebene positive Konstante sei.

Dabei ist der Fall eines anti-analytischen Koeffizienten μ von besonderen Interesse, da die Lösungen dieser Systeme harmonische Abbildungen sind.

Zunächst soll kurz beschrieben werden, wie nachfolgende Formeln erhalten wurden. Setzt man

$$F(t,z) = \Phi_1(t,z) + \overline{\Phi_2(t,z)}, \quad G(t,z) = \Phi_1(t,z) - \overline{\Phi_2(t,z)},$$

so gilt ([2], IV.1.15)

$$\begin{aligned} F(t,z) &= -\frac{\overline{\mu(t)}}{t-z} + \overline{\mu(t) TF(\cdot,z)(t)}, \\ G(t,z) &= \frac{\overline{\mu(t)}}{t-z} - \overline{\mu(t) TF(\cdot,z)(t)}, \end{aligned}$$

wobei der Operator T die komplexe Hilberttransformation ist. Daher gilt

$$(I - \overline{\mu(t) T})F(\cdot,z) \quad = \quad -\frac{\overline{\mu(t)}}{t-z},$$

$$(I+\overline{\mu(t)T})G(\cdot,z) \;=\; \frac{\overline{\mu(t)}}{\overline{t-z}}$$

mit $(\overline{\mu(t)T})f := \overline{\mu(t)Tf}$. Unter den Voraussetzungen (2) gilt somit

$$F(t,z)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\left(\overline{\mu(\cdot)T}\right)^{j}\eta(\cdot,z)\right)(t)$$

mit

$$\eta(t,z)=-\frac{\overline{\mu(t)}}{\overline{t-z}}$$

und diese Reihe konvergiert in $L_q(\mathbb{C})$, nämlich für alle $q\in(1,2)$, für die die Norm des Operators $\overline{\mu T}$ in $L_q(\mathbb{C})$ kleiner als 1 ist (für Details siehe z.B. [2]). Nach [2], IV.3.5 ergibt sich dann

$$H(t,z,0,\overline{\mu})=\log(t-z)-PF(\cdot,z)(t).$$

Satz 7. *Es sei μ analytisch für $|z|<R$, $\mu(z)\equiv 0$ für $|z|\geq R$ und $\|\mu\|_{L_\infty}<1$. Dann ist die Fundamentallösung $H(t,z,0,\mu)$ gegeben durch*

$$H(t,z,0,\mu)=\log(t-z)+r_\infty(t,z)$$

mit

$$r_\infty(t,z)=\frac{|\mu(t)|^2}{1-|\mu(t)|^2}\log\frac{t-z}{\frac{R^2}{t}-z}+\frac{\mu(t)}{1-|\mu(t)|^2}\log\frac{\overline{t-z}}{\frac{R^2}{\overline{t}}-\overline{z}}$$

$$(8)\qquad +\frac{\mu(t)}{1-|\mu(t)|^2}\begin{cases}\overline{\int\limits_{\substack{0\\(c)}}^{z}\frac{\mu(\zeta)}{\frac{R^2}{t}-\zeta}\,d\zeta}-\overline{\int\limits_{\substack{0\\(c)}}^{z}\frac{\mu(\zeta)}{t-\zeta}\,d\zeta} & : \ |z|<R,\\[2ex] \overline{\int\limits_{\substack{0\\(c)}}^{\frac{R^2}{\overline{z}}}\frac{\mu(\zeta)}{\frac{R^2}{t}-\zeta}\,d\zeta}-\overline{\int\limits_{\substack{0\\(c)}}^{\frac{R^2}{\overline{z}}}\frac{\mu(\zeta)}{t-\zeta}\,d\zeta} & : \ |z|\geq R\end{cases}$$

$$+\frac{1}{1-|\mu(t)|^2}\begin{cases}|\mu(t)|^2\int\limits_{\substack{0\\(c)}}^{z}\frac{\mu(\zeta)}{\frac{R^2}{t}-\zeta}\,d\zeta-\int\limits_{\substack{0\\(c)}}^{z}\frac{\mu(\zeta)}{t-\zeta}\,d\zeta & : \ |z|<R,\\[2ex] |\mu(t)|^2\int\limits_{\substack{0\\(c)}}^{\frac{R^2}{\overline{z}}}\frac{\mu(\zeta)}{\frac{R^2}{t}-\zeta}\,d\zeta-\int\limits_{\substack{0\\(c)}}^{\frac{R^2}{\overline{z}}}\frac{\mu(\zeta)}{t-\zeta}\,d\zeta & : \ |z|\geq R\end{cases}$$

für $|t|<R$ und

$$(9)\qquad r_\infty(t,z)=-\begin{cases}\int\limits_{\substack{0\\(c)}}^{z}\frac{\mu(\zeta)}{t-\zeta}\,d\zeta & : \ |z|<R,\\[2ex] \int\limits_{\substack{0\\(c)}}^{\frac{R^2}{\overline{z}}}\frac{\mu(\zeta)}{t-\zeta}\,d\zeta & : \ |z|\geq R\end{cases}$$

für $|t| \geq R$.
Für $|z| \neq R$ *verlaufe der Integrationsweg* $\mathfrak{c}$ *innerhalb von* $\{z : |z| < R\}$ *und im Fall* $|z| = R$ *entlang dem Radius.*

Beweis. Zum Beweis des Satzes soll gezeigt werden, dass das oben definierte $H(t, z, 0, \mu)$ die Punkte (I)-(IV) der Definition 1 erfüllt. Zunächst wird die Eindeutigkeit gezeigt. Für $|t| < R, |z| < R$ gilt nun gerade

$$
\begin{aligned}
r_\infty(t,z) =& \frac{|\mu(t)|^2}{1-|\mu(t)|^2} \log \frac{t-z}{\frac{R^2}{\bar{t}}-z} + \frac{\mu(t)}{1-|\mu(t)|^2} \log \overline{\frac{t-z}{\frac{R^2}{t}-\bar{z}}} \\
& + \frac{\mu(t)}{1-|\mu(t)|^2} \overline{\int_0^z \frac{\mu(\zeta)}{\frac{R^2}{\bar{t}}-\zeta}\, d\zeta} - \frac{\mu(t)}{1-|\mu(t)|^2} \overline{\int_0^z \frac{\mu(\zeta)}{t-\zeta}\, d\zeta} \\
& + \frac{|\mu(t)|^2}{1-|\mu(t)|^2} \int_0^z \frac{\mu(\zeta)}{\frac{R^2}{\bar{t}}-\zeta}\, d\zeta - \frac{1}{1-|\mu(t)|^2} \int_0^z \frac{\mu(\zeta)}{t-\zeta}\, d\zeta.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Addiert man nun zu (10)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\mu(t)}{1-|\mu(t)|^2} \overline{\int_0^z \frac{\mu(t)}{t-\zeta}\, d\zeta} - \frac{\mu(t)}{1-|\mu(t)|^2} \overline{\int_0^z \frac{\mu(t)}{t-\zeta}\, d\zeta} \\
& + \frac{1}{1-|\mu(t)|^2} \int_0^z \frac{\mu(t)}{t-\zeta}\, d\zeta - \frac{1}{1-|\mu(t)|^2} \int_0^z \frac{\mu(t)}{t-\zeta}\, d\zeta = 0,
\end{aligned}
$$

so erhält man

$$
\begin{aligned}
& r_\infty(t,z) \\
= \;& \frac{|\mu(t)|^2}{1-|\mu(t)|^2} \log \frac{|t-z|^2}{R^2-\bar{t}z} + \frac{\mu(t)}{1-|\mu(t)|^2} \log \frac{|t-z|^2}{R^2-t\bar{z}} \\
& + \frac{\mu(t)}{1-|\mu(t)|^2} \overline{\int_0^z \frac{\mu(\zeta)}{\frac{R^2}{\bar{t}}-\zeta}\, d\zeta} + \frac{\mu(t)}{1-|\mu(t)|^2} \overline{\int_0^z \frac{\mu(t)-\mu(\zeta)}{t-\zeta}\, d\zeta} \\
& + \frac{|\mu(t)|^2}{1-|\mu(t)|^2} \int_0^z \frac{\mu(\zeta)}{\frac{R^2}{\bar{t}}-\zeta}\, d\zeta + \frac{1}{1-|\mu(t)|^2} \int_0^z \frac{\mu(t)-\mu(\zeta)}{t-\zeta}\, d\zeta,
\end{aligned}
$$

d.h. $r_\infty(t,z)$ ist Summe eindeutiger Funktionen und damit selbst eindeutig. Ebenso ergibt sich die Eindeutigkeit für die verbleibenden Fälle.

Des Weiteren ist die Stetigkeit von

$$r_\infty(t,z) = H(t,z,0,\mu) - \log(t-z)$$

für beliebiges, aber festes $z \in \mathbb{C}$ als Funktion von t in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ zu zeigen. Dabei bedarf nur das Verhalten von $r_\infty(t,z)$ für $|t| \to R$ einer Untersuchung, da in den übrigen Fällen die Stetigkeit unmittelbar den Formeln (8),(9) zu entnehmen ist. Nun ist für $|z| < R$

$$\begin{aligned}
&\lim_{|t|\to R-0} r_\infty(t,z) \\
&= \lim_{|t|\to R} \Bigg(\frac{|\mu(t)|^2}{1-|\mu(t)|^2} \log \frac{t-z}{\frac{R^2}{\bar t} - z} + \frac{\mu(t)}{1-|\mu(t)|^2} \log \frac{\overline{t-z}}{\frac{R^2}{t} - \bar z} \\
&\quad + \frac{\mu(t)}{1-|\mu(t)|^2} \left(\overline{\int_0^z \frac{\mu(\zeta)}{\frac{R^2}{\bar t} - \zeta}\, d\zeta} - \overline{\int_0^z \frac{\mu(\zeta)}{t-\zeta}\, d\zeta} \right) \\
&\quad + \frac{1}{1-|\mu(t)|^2} \left(|\mu(t)|^2 \int_0^z \frac{\mu(\zeta)}{\frac{R^2}{\bar t} - \zeta}\, d\zeta - \int_0^z \frac{\mu(\zeta)}{t-\zeta}\, d\zeta \right) \Bigg) \\
&= -\lim_{|t|\to R} \int_0^z \frac{\mu(\zeta)}{t-\zeta}\, d\zeta,
\end{aligned}$$

da der Grenzwert der ersten 4 Summanden gerade Null ist. Analog ergibt sich die Stetigkeit für $|z| \geq R$.
Weiterhin gehört für beliebiges, aber festes $z \in \mathbb{C}$, $|t| < R$ $r_\infty(t,z)$ als Funktion von t zu $L_r(K \cap \{t : |t| < R\})$, da z.B. $\frac{|\mu(t)|^2}{1-|\mu(t)|^2}$ beschränkt und $\log(t-z)$, $\log\left(\frac{R^2}{\bar t} - z\right)$, $\int_0^z \frac{\mu(\zeta)}{t-\zeta}\, d\zeta \in L_r(K \cap \{t : |t| < R\})$ für jedes endliche $r \geq 1$ und jede beschränkte messbare Menge K sind. Ebenso gehört $r_\infty(t,z)$ für $|t| \geq R$ zu $L_r(K \cap \{t : |t| \geq R\})$ und damit schließlich zu $L_r(K)$.
Die Funktion $H(t,z,0,\mu)$ erfüllt die zugehörigen Differentialgleichung in (jedem einfach zusammenhängenden Teilgebiet von) $\mathbb{C}$. Dazu werde für $|t| < R, |z| < R$

$$R(t,z) \quad := \quad \frac{\overline{\mu(t)}}{1-|\mu(t)|^2} \log \frac{t-z}{\frac{R^2}{\bar t} - z} - \frac{1}{1-|\mu(t)|^2} \overline{\int_0^z \frac{\mu(\zeta)}{t-\zeta}\, d\zeta},$$

$$S(t,z) \;:=\; \frac{\mu(t)}{1-|\mu(t)|^2}\overline{\int_0^z \frac{\mu(\zeta)}{\frac{R^2}{\overline{t}}-\zeta}\,d\zeta}$$

gesetzt. Dann ist

$$\begin{aligned} H(t,z,0,\mu) &= \log(t-z)+\mu(t)R(t,z)+S(t,z)+\overline{R(t,z)} \\ &\quad +\mu(t)\overline{S(t,z)}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} & H_{\overline{t}}(t,z,0,\mu)-\mu(t)\overline{H_t} \\ =\; & \left(\mu(t)R(t,z)+S(t,z)+\overline{R(t,z)}+\mu(t)\overline{S(t,z)}\right)_{\overline{t}}-\frac{\mu(t)}{\overline{\overline{t-z}}} \\ & -\mu(t)\left(\overline{\mu(t)R(t,z)}+\overline{S(t,z)}+R(t,z)+\overline{\mu(t)}S(t,z)\right)_{\overline{t}} \\ =\; & \left((1-|\mu(t)|^2)S(t,z)+(1-|\mu(t)|^2)\overline{R(t,z)}\right)_{\overline{t}}-\frac{\mu(t)}{\overline{\overline{t-z}}} \\ =\; & \left(\mu(t)\log(\overline{t-z})\right)_{\overline{t}}-\frac{\mu(t)}{\overline{\overline{t-z}}}=0. \end{aligned}$$

Analog überprüft man die Differentialgleichung für die restlichen Fälle. Weiterhin entnimmt man direkt den Formeln, dass für jedes (feste) $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} r_\infty(t,z)=0.$$

Somit erfüllt $H(t,z,0,\mu)$ die Bedingungen von Definition 1 und ist daher die gesuchte Fundamentallösung.
□

Satz 8. *Es sei μ anti-analytisch für $|z|<R$, $\mu\equiv 0$ für $|z|\geq R$ und $\|\mu\|_{L_\infty}<1$. Dann ist die Fundamentallösungen $H(t,z,0,\mu)$ gegeben durch*

$$H(t,z,0,\mu)=\log(t-z)+r_\infty(t,z)$$

mit

$$r_\infty(t,z)=\frac{\left(1+\overline{\mu(z)}\right)\mu(z)}{1-|\mu(z)|^2}\left(\log(t-z)-\log\left(t-\frac{R^2}{\overline{z}}\right)\right)$$

$$
(11) \qquad + \frac{1+\overline{\mu(z)}}{1-|\mu(z)|^2} \begin{cases} \overline{\int\limits_{\substack{0\\(\mathfrak{c})}}^{t} \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta} & : \quad |t| < R, \\ \overline{\int\limits_{\substack{0\\(\mathfrak{c})}}^{\frac{R^2}{\bar t}} \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta} & : \quad |t| \geq R \end{cases}
$$

$$
- \frac{(1+\mu(z))\,\overline{\mu(z)}}{1-|\mu(z)|^2} \begin{cases} \overline{\int\limits_{\substack{0\\(\mathfrak{c})}}^{t} \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{\zeta - \frac{R^2}{\bar z}}\, d\zeta} & : \quad |t| < R, \\ \overline{\int\limits_{\substack{0\\(\mathfrak{c})}}^{\frac{R^2}{\bar t}} \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{\zeta - \frac{R^2}{\bar z}}\, d\zeta} & : \quad |t| \geq R \end{cases}
$$

für $|z| < R$ und

$$
(12) \qquad r_\infty(t,z) = \begin{cases} \overline{\int\limits_{\substack{0\\(\mathfrak{c})}}^{t} \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta} & : \quad |t| < R, \\ \overline{\int\limits_{\substack{0\\(\mathfrak{c})}}^{\frac{R^2}{\bar t}} \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta} & : \quad |t| \geq R \end{cases}
$$

für $|z| \geq R$.
Für $|t| \neq R$ verlaufe der Integrationsweg $\mathfrak{c}$ innerhalb von $\{t : |t| < R\}$ und im Fall $|t| = R$ entlang dem Radius.

Beweis. Der Beweis verläuft ähnlich zum Beweis zu Satz 8. Es wird wieder gezeigt, dass das oben definierte $H(t,z,0,\mu)$ die Punkte (I)-(IV) der Definition 1 erfüllt. Zunächst ist die Eindeutigkeit zu überprüfen. Nun ist für $|t| < R, |z| < R$

$$
\begin{aligned}
r_\infty(t,z) =& \frac{(1+\overline{\mu(z)})\mu(z)}{1-|\mu(z)|^2} \left(\log(t-z) - \log\left(t - \frac{R^2}{\bar z}\right)\right) \\
&+ \frac{1+\overline{\mu(z)}}{1-|\mu(z)|^2} \overline{\int_0^t \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta} - \frac{(1+\mu(z))\overline{\mu(z)}}{1-|\mu(z)|^2} \overline{\int_0^t \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{\zeta - \frac{R^2}{\bar z}}\, d\zeta} \\
=& \frac{(1+\overline{\mu(z)})\mu(z)}{1-|\mu(z)|^2} \left(\log(t-z) - \log\left(t - \frac{R^2}{\bar z}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1+\overline{\mu(z)}}{1-|\mu(z)|^2}\overline{\int\limits_0^t \frac{\overline{\mu(\zeta)}-\overline{\mu(z)}}{\zeta-z}\,d\zeta}+\frac{1+\overline{\mu(z)}}{1-|\mu(z)|^2}\overline{\int\limits_0^t \frac{\overline{\mu(z)}}{\zeta-z}\,d\zeta}\\
&-\frac{(1+\mu(z))\overline{\mu(z)}}{1-|\mu(z)|^2}\overline{\int\limits_0^t \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{\zeta-\frac{R^2}{\overline{z}}}\,d\zeta}\\
=&\frac{(1+\overline{\mu(z)})\mu(z)}{1-|\mu(z)|^2}\left(\log|t-z|^2-\log\left(t-\frac{R^2}{\overline{z}}\right)\right)\\
&+\frac{1+\overline{\mu(z)}}{1-|\mu(z)|^2}\overline{\int\limits_0^t \frac{\overline{\mu(\zeta)}-\overline{\mu(z)}}{\zeta-z}\,d\zeta}-\frac{1+\overline{\mu(z)}}{1-|\mu(z)|^2}\overline{\log(-z)}\\
&-\frac{(1+\mu(z))\overline{\mu(z)}}{1-|\mu(z)|^2}\overline{\int\limits_0^t \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{\zeta-\frac{R^2}{\overline{z}}}\,d\zeta},
\end{aligned}
$$

d.h. $r_\infty(t,z)$ ist Summe eindeutiger Summanden und daher selbst eindeutig. Ebenso ergibt sich die Eindeutigkeit in den übrigen Fällen.
Die Stetigkeit von

$$r_\infty(t,z) = H(t,z,0,\mu)-\log(t-z)$$

für beliebiges, aber festes $z \in \mathbb{C}$ als Funktion von t in $\mathbb{C}\setminus\{z\}$ ist den Formeln unmittelbar anzusehen.
Weiterhin gehört die Funktion $r_\infty(t,z)$ für beliebiges, aber festes $z \in \mathbb{C}$, $|t|<R$ als Funktion von t zu $L_r(K\cap\{t:|t|<R\})$, da z.B. $\log(t-z)$, $\log\left(t-\frac{R^2}{\overline{z}}\right)$ und $\int\limits_0^t \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{\zeta-z}\,d\zeta \in L_r(K\cap\{t:|t|<R\})$ für jedes endliche $r\geq 1$ und jede beschränkte, messbare Menge K sind. Ebenso gehört $r_\infty(t,z)$ für $|t|\geq R$ zu $L_r(K\cap\{t:|t|\geq R\})$ und damit schließlich zu $L_r(K)$.
Die Funktion $H(t,z,0,\mu)$ erfüllt die zugehörigen Differentialgleichung in (jedem einfach zusammenhängenden Teilgebiet von) $\mathbb{C}$, denn für $|t|<R, |z|<R$ gilt

$$
\begin{aligned}
&H_{\overline{t}}(t,z,0,\mu)-\mu(t)\overline{H_t}\\
=\;&\frac{1+\overline{\mu(z)}}{1-|\mu(z)|^2}\frac{\mu(t)}{\overline{t-z}}-\frac{(1+\mu(z))\overline{\mu(z)}}{1-|\mu(z)|^2}\frac{\mu(t)}{\overline{t}-\frac{R^2}{z}}\\
&-\frac{\mu(t)}{\overline{\overline{t-z}}}-\frac{(1+\mu(z))|\mu(z)|^2}{1-|\mu(z)|^2}\left(\frac{1}{\overline{\overline{t-z}}}-\frac{1}{\overline{t}-\frac{R^2}{z}}\right)=0.
\end{aligned}
$$

Analog überprüft man die Differentialgleichung für die restlichen Fälle. Weiterhin ist den Formeln unmittelbar anzusehen, dass für beliebiges, aber festes $z \in \mathbb{C}$

$$\lim_{t\to\infty} r_\infty(t,z) = 0,$$

ist. Somit erfüllt $H(t,z,0,\mu)$ die Bedingungen von Definition 1 und ist daher die gesuchte Fundamentallösung.
□

Zwischen den Fundamentallösungen für analytische und anti-analytische Koeffizienten besteht die folgende Beziehung, welche den Formeln aus den Sätzen 7 und 8 unmittelbar zu entnehmen ist und nach [2], V.2.1 auch für beliebige Koeffizienten ν und μ mit beschränkten Trägern gilt:

Anmerkung 1. *Es sei μ analytisch für $|z| < R$, $\mu(z) \equiv 0$ für $|z| \geq R$ und $\|\mu\|_{L_\infty} < 1$. Dann besteht zwischen der Funktion $r_\infty(t,z,0,\mu)$ $(= H(t,z,0,\mu) - \log(t-z))$ und $r_\infty(t,z,0,\overline{\mu})$ folgender Zusammenhang:*

$$\begin{aligned}
r_\infty(t,z,0,\mu) + r_\infty(t,z,0,-\mu) &= r_\infty(z,t,0,\overline{\mu}) + r_\infty(z,t,0,-\overline{\mu}) \\
r_\infty(t,z,0,\mu) - r_\infty(t,z,0,-\mu) &= \overline{r_\infty(z,t,0,\overline{\mu}) - r_\infty(z,t,0,-\overline{\mu})}.
\end{aligned}$$

Vermöge der Fundamentallösungen aus Satz 8, (5) und leichter elementarer Rechnungen lassen sich nun unmittelbar die Kerne berechnen, nämlich es gilt

Folgerung 1. *Es sei μ analytisch für $|z| < R$, $\mu(z) \equiv 0$ für $|z| \geq R$ und $\|\mu\|_{L_\infty} < 1$. Dann ist*

$$\Phi_1(t,z) = -\frac{\overline{\mu(t)}\mu(z)}{(1-|\mu(z)|^2)\overline{t-z}} + \frac{\overline{\mu(t)}\mu(z)}{(1-|\mu(z)|^2)\left(\overline{t} - \frac{R^2}{z}\right)}$$

und

$$\Phi_2(t,z) = \begin{cases} -\frac{\mu(t)}{(1-|\mu(z)|^2)(t-z)} + \frac{\mu(t)|\mu(z)|^2}{(1-|\mu(z)|^2)\left(t-\frac{R^2}{\overline{z}}\right)} & : \quad |z| < R, \\ -\frac{\mu(t)}{t-z} & : \quad |z| \geq R. \end{cases}$$

Auf die gleiche Weise und Satz 7 erhält man

Folgerung 2. *Es sei μ anti-analytisch für $|z| < R$, $\mu(z) \equiv 0$ für $|z| \geq R$ und $\|\mu\|_{L_\infty} < 1$. Dann ist*

$$\Phi_1(t,z) = -\left(\frac{|\mu(t)|^2}{1-|\mu(t)|^2} \log \frac{t-z}{\frac{R^2}{\overline{t}} - z}\right)_{\overline{t}}$$

$$+\begin{cases} \left(\frac{\overline{\mu(t)}}{1-|\mu(t)|^2}\overline{\int\limits_0^z \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{t-\zeta}d\zeta}\right)_{\overline{t}} - \left(\frac{\overline{\mu(t)}}{1-|\mu(t)|^2}\overline{\int\limits_0^z \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{\frac{R^2}{\overline{t}}-\zeta}d\zeta}\right)_{\overline{t}} & : \quad |z|<R, \\ \left(\frac{\overline{\mu(t)}}{1-|\mu(t)|^2}\overline{\int\limits_0^{\frac{R^2}{\overline{z}}} \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{t-\zeta}d\zeta}\right)_{\overline{t}} - \left(\frac{\overline{\mu(t)}}{1-|\mu(t)|^2}\overline{\int\limits_0^{\frac{R^2}{\overline{z}}} \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{\frac{R^2}{\overline{t}}-\zeta}d\zeta}\right)_{\overline{t}} & : \quad |z|\geq R \end{cases}$$

und

$$\Phi_2(t,z) = -\left(\frac{\mu(t)}{1-|\mu(t)|^2}\log\frac{t-z}{\frac{R^2}{\overline{t}}-z}\right)_t$$

$$+\begin{cases} \left(\frac{1}{1-|\mu(t)|^2}\overline{\int\limits_0^z \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{t-\zeta}d\zeta}\right)_t - \left(\frac{|\mu(t)|^2}{1-|\mu(t)|^2}\overline{\int\limits_0^z \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{\frac{R^2}{\overline{t}}-\zeta}d\zeta}\right)_t & : \quad |z|<R, \\ \left(\frac{1}{1-|\mu(t)|^2}\overline{\int\limits_0^{\frac{R^2}{\overline{z}}} \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{t-\zeta}d\zeta}\right)_t - \left(\frac{|\mu(t)|^2}{1-|\mu(t)|^2}\overline{\int\limits_0^{\frac{R^2}{\overline{z}}} \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{\frac{R^2}{\overline{t}}-\zeta}d\zeta}\right)_t & : \quad |z|\geq R. \end{cases}$$

4. **Weitere Beispiele.**

Beispiel 2. *Es sei*

$$\mu(z) = \begin{cases} c = const. & : \quad |z|<R, \\ 0 & : \quad |z|\geq R \end{cases}$$

mit $R\in\mathbb{R}^+$ *und* $\|\mu\|_{L_\infty}<1$. *Dann ist die Fundamentallösung* $H(t,z,0,\mu)$ *für* $|z|<R$ *gegeben durch*

$$H(t,z,0,\mu) = \log(t-z)$$
$$+\begin{cases} \frac{c+|c|^2}{1-|c|^2}\log\left|\frac{(t-z)R}{R^2-t\overline{z}}\right|^2 + c\log\left(1-\frac{z\overline{t}}{R^2}\right) & : \quad |t|<R, \\ c\log\left(1-\frac{z}{t}\right) & : \quad |t|\geq R \end{cases}$$

und für $|z|\geq R$

$$H(t,z,0,\mu) = \log(t-z) + \begin{cases} c\log\left(1-\frac{\overline{t}}{\overline{z}}\right) & : \quad |t|<R, \\ c\log\left(1-\frac{R^2}{\overline{z}t}\right) & : \quad |t|\geq R. \end{cases}$$

Beispiel 3. *Es sei*

$$\mu(z) = \begin{cases} \overline{\lambda z} & : \quad |z|<R, \\ 0 & : \quad |z|\geq R \end{cases}$$

mit $R\in\mathbb{R}^+$ *und* $\|\mu\|_{L_\infty}<1$. *Dann ist die Fundamentallösung* $H(t,z,0,\mu)$ *für* $|z|<R$ *gegeben durch*

$$H(t,z,0,\mu) = \log(t-z)$$

$$+\left\{\begin{array}{ll}\frac{\overline{\lambda z}+|\lambda z|^2}{1-|\lambda z|^2}\log\left|\frac{(t-z)R}{R^2-t\overline{z}}\right|^2+\overline{\lambda t} & \\ +\frac{(1+\overline{\lambda z})|\lambda|^2(|z|^2-R^2)}{1-|\lambda z|^2}\log\left(1-\frac{z\overline{t}}{R^2}\right)+\overline{\lambda z}\log\left(1-\frac{z\overline{t}}{R^2}\right) & : \ |t|<R, \\ \overline{\lambda}\frac{R^2}{t}+\frac{(1+\overline{\lambda z})|\lambda|^2(|z|^2-R^2)}{1-|\lambda z|^2}\log\left(1-\frac{z}{t}\right)+\overline{\lambda z}\log\left(1-\frac{z}{t}\right) & : \ |t|\geq R\end{array}\right.$$

und für $|z|\geq R$

$$H(t,z,0,\mu)=\log(t-z)+\left\{\begin{array}{ll}\overline{\lambda t}+\overline{\lambda z}\log\left(1-\frac{\overline{t}}{\overline{z}}\right) & : \ |t|<R, \\ \overline{\lambda}\frac{R^2}{t}+\overline{\lambda z}\log\left(1-\frac{R^2}{\overline{z}t}\right) & : \ |t|\geq R.\end{array}\right.$$

Beispiel 4. *Es sei*

$$\mu(z)=\left\{\begin{array}{lll}\lambda t & : & |z|<R, \\ 0 & : & |z|\geq R\end{array}\right.$$

mit $R\in\mathbb{R}^+$ *und* $\|\mu\|_{L_\infty}<1$*. Dann ist die Fundamentallösung* $H(t,z,0,\mu)$ *für* $|z|<R$ *gegeben durch*

$$\begin{aligned}&H(t,z,0,\mu)=\log(t-z)+\lambda z+\frac{\lambda t+|\lambda t|^2}{1-|\lambda t|^2}\log\left|\frac{(t-z)R}{R^2-t\overline{z}}\right|^2\\ &+\frac{\lambda t|\lambda|^2(|t|^2-R^2)}{1-|\lambda t|^2}\log\left(1-\frac{\overline{t}z}{R^2}\right)+\lambda t\log\left(1-\frac{\overline{t}z}{R^2}\right)\\ &+\frac{|\lambda|^2(|t|^2-R^2)}{1-|\lambda t|^2}\log\left(1-\frac{t\overline{z}}{R^2}\right) \qquad \textit{für } |t|<R, |z|<R;\end{aligned}$$

und

$$H(t,z,0,\mu)=\log(t-z)+\lambda z+\lambda t\log\left(1-\frac{z}{t}\right) \qquad \textit{für } |t|\geq R, |z<R;$$

und

$$\begin{aligned}&H(t,z,0,\mu)=\log(t-z)+\lambda\frac{R^2}{\overline{z}}+\frac{|\lambda|^2(|t|^2-R^2)}{1-|\lambda t|^2}\log\left(1-\frac{t}{z}\right)\\ &+\frac{\lambda t|\lambda|^2(|t|^2-R^2)}{1-|\lambda t|^2}\log\left(1-\frac{\overline{t}}{\overline{z}}\right)+\lambda t\log\left(1-\frac{\overline{t}}{\overline{z}}\right) \qquad \textit{für } |t|<R, |z|\geq R;\end{aligned}$$

und

$$H(t,z,0,\mu) \ = \ \log(t-z)+\lambda\frac{R^2}{\overline{z}}+\lambda t\log\left(1-\frac{R^2}{\overline{z}t}\right) \quad \textit{für } |t|\geq R, |z|\geq R.$$

Literatur

[1] J.A.Cima,W.R.Derrick. Normal Solutions of the Beltrami Equation II. Journal of Mathematical Analysis and Applications 151, 359-371 (1990).
[2] H.Renelt. Quasikonforme Abbildungen und elliptische Systeme erster Ordnung in der Ebene, Teubner-Texte zur Mathematik, Band 46, Leipzig, (1982).
[3] H.Renelt. Smooth Approximation of Solutions of Cauchy-Riemann Systems. Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Vol. L, 19, Sectio A, 191-199, (1996).