Löst der Taschencomputer bald alle Probleme? Computer-Algebra-Systeme und Mathematik-Unterricht

Wilfried Herget / Elvira Malitte / Rolf Sommer
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Ohne Zweifel bedeuten die neuen Möglichkeiten durch die symbolischen und graphischen Taschenrechner und die Computer-Algebra-Systeme einen Gewinn, erleichtern zahlreiche Rechnungen, machen manche Berechnung überhaupt erst „menschenmöglich“; aber wieviel muß man wissen und beherrschen, um diese Systeme erfolgreich handhaben zu können?
Noch gehört – trotz Taschenrechner – das Training der schriftlichen Rechenverfahren zum Alltag der Grundschule, aber an vielen Orten wird deutlich weniger Zeit und Kraft darauf verwendet, und die dabei bearbeiteten Aufgaben sind weniger komplex. Es ist abzusehen, daß es uns mit dem Umformen von Termen und mit dem Lösen von Gleichungen genauso gehen wird. Aber: Was bedeutet das für das grundlegende Verständnis, wenn solche „Rezepte“ im Unterricht weitgehend „aussterben“, eben weil die modernen, leistungsfähigen Taschencomputer einfach da sind?
Die „p-q-Formel“ zum Lösen quadratischer Gleichungen ist ein solches „aussterbendes Rezept“: Zu jeder vorgegebenen quadratischen Gleichung liefert das dafür zuständige Rezept stets die gewünschte Antwort – das läßt sich getrost dem Taschencomputer übertragen. Deutlich anders ist es im Bereich Termumformung: Hier kommt es darauf an zu wissen, wo man hin will – Terme umformen ist eben keine typisch „deterministische“ Aufgabenstellung.
Gerade deswegen sind auch in Zukunft solide Grundvorstellungen über den Aufbau von Termen und gewisse Grundfertigkeiten im Umgang mit ihnen unverzichtbar. Also: „Mathematik-Software ***und*** Mathematik-Unterricht“ und nicht „Mathematik-Software ***statt*** Mathematik-Unterricht“!

Zukunft ist, mathematisch ausgedrückt,
Vergangenheit und Gegenwart plus x.
Eric Reger

Wozu soll ich das noch unterrichten?

Es gehört nicht viel Phantasie dazu, sich vorzustellen, daß unsere Gymnasiasten bereits jetzt über erschwingliche, aber leistungsfähige Taschencomputer verfügen. Vereinfachen komplizierter Terme, Differenzieren, Integrieren, Kurvenzeichnen, Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen und vieles mehr werden damit zu Aufgaben, die grundsätzlich nicht schwerer sind als etwa „Berechne $(0{,}98765)^{4{,}321}$" oder „Berechne $\cos^2(-0{,}123)$".

Was ändert sich dadurch im Mathematikunterricht? *Wozu* also soll ich alle diese Fertigkeiten noch unterrichten, die den alltäglichen Mathematikunterricht wesentlich bestimmen? In jedem Fall aber die Frage: W*ie* – in welchem Umfang, auf welche Weise – soll ich das noch unterrichten?

Wieviel Termumformung braucht der Mensch?

Sehr oft (verlangt) der sogenannte Mathematiker für einen tiefen Denker gehalten zu werden, obgleich es darunter die größten Plunderköpfe gibt, die man nur finden kann, untauglich zu irgendeinem Geschäft, das Nachdenken erfordert, wenn es nicht unmittelbar durch jene leichte Verbindung von Zeichen geschehen kann, die mehr das Werk der Routine als des Denkens sind.

Lichtenberg

Die großformatige Anzeige eines Taschenrechnerherstellers beginnt damit: „Gute Schulrechner machen aus Schülern gute Rechner". Diese Werbebotschaft suggeriert „Ich brauche nur das richtige Gerät, und schon ist alles einfacher". So wirbt auch manche Autofirma nach dem Motto: „Die richtige Technik, und schon kann Ihnen nichts passieren". Das stimmt natürlich nicht. Auch der BMW oder der Porsche oder der Wasauchimmer macht aus uns keinen Michael Schumacher, und auch der moderne Taschencomputer wie etwa der TI-92 macht aus uns keine Sonja Kowalewskaja, keinen Carl Friedrich Gauß.

Ohne Zweifel bedeuten die neuen Möglichkeiten durch die Computer-Algebra-Systeme (CAS) einen Gewinn, erleichtern zahlreiche Rechnungen, machen manche Berechnung überhaupt erst „menschenmöglich"; aber wieviel muß man (und frau) wissen und beherrschen, um diese Systeme erfolgreich handhaben zu können? Um es in Anlehnung an Tolstoi zu fragen: Wieviel Termumformung braucht der Mensch?

Ein Blick zurück – wie war das mit dem Taschenrechner?

Man muß Zukunft im Sinn haben
und Vergangenheit in den Akten.

Talleyrand

Ein Gesichtspunkt zur Beantwortung der oben gestellten Fragen „*Wozu* soll ich das noch unterrichten? *Wie* soll ich das noch unterrichten?" ist für uns der Blick zurück: Wie war das eigentlich damals, als der Taschenrechner ebenso vor der Tür stand wie heute der CAS-fähige Taschencomputer vor der Tür steht? 1978 schrieb Bernard WINKELMANN „Numerisches Rechnen wird für den normalen Menschen nach dem Taschenrechner nie mehr das sein, was es vorher war." Und wir können heute formulieren „Symbolisches Rechnen wird für den normalen Menschen nach dem Taschencomputer nie mehr das sein, was es vorher war." Also: Die Werkzeuge verschieben die Bewertung der Inhalte unseres Mathematikunterrichts. Wir können gar nicht umhin, uns diesen Konsequenzen auch zu stellen.

Betrachten wir einmal eine Aufgabenkette wie die folgende:

$5 + 7$; $8 \cdot 6$; $17 + 15$; $23 + 48$; $17 \cdot 15$; $23 \cdot 48$; $668 : 23$; $27{,}48 \cdot 133{,}72$; $2876{,}52 : 346{,}9$.

Wenn WINKELMANN damals dazu schreibt: „Viele werden mit mir der Überzeugung sein, daß die letzte oder die letzten beiden dieser Aufgaben heute nicht mehr zu den taschenrechnerfreien Mindestkenntnissen und -fertigkeiten zu gehören hätten", dann mag das damals mutig gewesen sein, heute wirkt es eher vorsichtig. Welche dieser Aufgaben soll heute ein Schulabgänger im Kopf lösen können, und bei welchen wird eine schriftliche Lösung erwartet? Bei welchen dieser Aufgaben wird man den Griff zum Taschenrechner als selbstverständlich akzeptieren? Dieser Maßstab hat sich im Laufe der Zeit verändert, und er wird sich in der Zukunft weiter in derselben Richtung verändern.

Noch gehört das Training der schriftlichen Rechenverfahren zum Alltag der Grundschule, aber an vielen Orten wird deutlich weniger Zeit und Kraft darauf verwendet, und die dabei bearbeiteten Aufgaben sind weniger komplex. Erleben wir hier bereits das Aussterben eines Dinosauriers? Werden die schriftlichen Rechenverfahren eines Tages vollständig aus dem Mathematikunterricht verschwinden? Aber: Was bedeutet das für das grundlegende Verständnis des Rechnens in einem Stellenwertsystem? Für wen ist es wirklich wichtig zu begreifen, daß auch Taschenrechner und Computer aufgrund solcher Algorithmen rechnen?

Wir sollten nicht vergessen, daß es uns mit dem Umformen von Termen, mit dem Lösen von Gleichungen genauso gehen wird – eben weil die modernen, leistungsfähigen Taschencomputer einfach da sind.

Der Mathematikunterricht ist wie ein Tanker

An die Geschichte verweise ich Euch.
Forscht in ihrem belehrenden Zusammenhang
und lernt den Zauberstab der Analogie gebrauchen.

Novalis

„Der Mathematikunterricht ist wie ein Tanker." Jede Kurskorrektur braucht eine ganze Weile, so leicht und schnell ändert sich da nichts. Eben wie im Mathematikunterricht. Unser Vorteil heute ist, daß wir auf die Erfahrungen mit dem einfachen Taschenrechner zurückgreifen können.

Die **Abb.1** (nach LUX/ HERGET/ KLIKA 1996) gibt einen Überblick über die Anzahl von Lehrerantworten auf die Frage, ab welcher Klasse sie den Einsatz des Taschenrechners für sinnvoll halten würden. Zwar hatten die einzelnen Umfragen unterschiedlichen Charakter, auch waren die Fragen etwas unterschiedlich formuliert; dennoch ist deutlich erkennbar, wie wenig sich die Einstellung der Lehrerinnen und Lehrer zu diesem Thema in zwei Jahrzehnten verändert hat – und wie sehr hier Lehrereinstellungen und die tatsächliche Taschenrechner-Nutzung durch die Schülerinnen und Schüler auseinanderklaffen!

ab Klasse➔ **Jahr🡣**	**≤5**	**≤6**	**≤7**	**≤8**	**≤9**	**≤10**	Autor (Anzahl)
1976	2	3	27	83	95	96	Wynands (n = 85)
1978	-	-	13	33	79	93	Herget u. a. (n = 77)
1994	2	4	32	70	96	98	Lux u. a. (n = 85)

Abb. 1: „Ab welcher Klasse halten Sie den Taschenrechner-Einsatz für sinnvoll?" – Lehrerantworten *(Angaben in %)*

Terme umformen – eine komplexes Problem

Einer der zentralen Gegenstände des Mathematikunterrichts in diesem Zusammenhang ist das Umformen von Termen.

Gerade in dem Bereich Termumformung kommt es darauf an zu wissen, wo man hin will. Diese Einsicht dürfte im Unterricht manches Mal zu kurz kommen. Das Umformen von Termen ist eben keine typisch „deterministische“ Aufgabenstellung. Dies unterscheidet den Bereich Termumformungen zum Beispiel von dem Lösen etwa quadratischer Gleichungen: Zu jeder vorgegebenen quadratischen Gleichung liefert das dafür zuständige Rezept stets die gewünschte Antwort. Selbst wenn sich dabei nicht immer zwei verschiedene Lösungen ergeben, sondern manchmal eine und manchmal keine, selbst wenn also eine gewisse Diversität da ist, ist es doch streng deterministisch. Beim Umformen von Termen dagegen muß man zunächst einmal wissen, wo man hin will, muß man zunächst einmal entscheiden, was getan werden soll: Manchmal will man aus einer Summe ein Produkt machen – dann muß man ausklammern, faktorisieren; manchmal aber wieder will man aus einem Produkt eine Summe machen – dann muß man nicht faktorisieren, sondern ausmultiplizieren, die Klammern auflösen. Ein anderes Mal geht es vielleicht darum, auf einen Hauptnenner zu bringen, oder all das hilft nicht, und man braucht noch einen ganz speziellen Trick. Und jedes Mal gilt es, die vorliegende Situation zu beurteilen, das Ziel im Auge zu haben und dann diese Entscheidung zu treffen – erst dann kann das ausgewählte Rezept abgearbeitet werden.

Gerade deswegen sind – auch in Zukunft – solide Grundvorstellungen über den Aufbau von Termen und gewisse Grundfertigkeiten im Umgang mit ihnen unverzichtbar. Nur dann kann ich beurteilen, welche Struktur ein vorgegebener Term hat; nur dann kann ich einschätzen, in welche Richtung ein Term bearbeitet werden soll; nur dann kann ich entscheiden, welche Schritte dafür sinnvoll sein könnten; nur dann kann ich den Taschencomputer und das Computer-Algebra-System geschickt nutzen, nur dann kann ich wirklich einschätzen, ob ich in diesem Fall den einen Befehl brauche oder gerade den anderen Befehl oder noch einen dritten Befehl. Aus diesem Grunde wird der Bereich Termumformung in der Schule durch den CAS-fähigen Taschenrechner nicht einfach überflüssig. Daher können wir derzeit auch nicht sehen, daß der Mathematikunterricht sich dort, bei der *Einführung* in das Problemfeld Termumformungen, wesentlich verändern muß – die dort vermittelten Grundverständnisse und Grundfertigkeiten sind immer noch notwendig und werden auch in Zukunft unverzichtbar bleiben.

Der notwendige Überblick

Betrachten wir einmal einen recht einfachen Term wie etwa

$$\frac{x^2+x}{x+6}$$

Wir können das auch ein bißchen anspruchsvoller machen und etwa noch ein *sin²* ergänzen:

$$\frac{x^2+x}{sin^2(x+6)}$$

Jetzt stellen Sie sich vor, Sie müßten diesen Term etwa in einen Taschencomputer wie den TI-92 eintippen: Wie mache ich das mit dem Bruchstrich? Und wie mache ich das mit dem $\sin^2$, wie muß ich das in den Rechner eingeben? Das Schöne an dem neuen Taschencomputer ist, daß er in der Anzeige zeigt, wie er das „verstanden" hat. So kann ich nachsehen, ob er es *so* interpretiert hat, wie ich es *gemeint* habe. Damit ist er schon um einen ordentlichen Schritt „kommunikationsfreundlicher" als etwa die üblichen Programmiersprachen. Es ist gut, daß die Rechner mehr und mehr so konzipiert werden, daß sie sich nach unseren Wünschen und Bedürfnissen richten (und nicht umgekehrt). Aber dazu muß auch *ich* als Nutzer in der Lage sein, seine Anzeige „lesen" zu können, um zu entscheiden, ob dies tatsächlich dem entspricht, was ich *gemeint* hatte.
Wenn man jetzt diesen Term gleich Null setzt

$$\frac{x^2+x}{sin^2(x+6)}=0$$

dann kann man natürlich mit dem Taschencomputer diese Gleichung „per Knopfdruck" lösen. Und siehe da: Für eine der Nullstellen ergibt sich $x = 0$. Warum eigentlich? Weil man x ausklammern kann. *Sie, wir* sehen das „mit einem Blick" – wie viele unserer Schülerinnen und Schülern sehen das heute, und wie viele werden es in zehn Jahren sein, wenn vielleicht der Taschencomputer bereits in der Sekundarstufe I zum Alltag im Mathematikunterricht gehört? Wenn wir glauben, daß dieses „Sehen können" auch zukünftig von unverzichtbarem Wert ist, dann werden wir dies auch weiterhin üben müssen. Wo bleibt da die viel beschworene tiefgreifende „galaktische" Veränderung des Mathematikunterrichts durch CAS und Taschencomputer?

Rüdeger BAUMANN berichtete 1995 über seine Erfahrungen beim Einsatz des Computer-Algebra-Systems *DERIVE* im Analysisunterricht. Überrascht hat ihn, daß die Schülerinnen und Schüler der Arbeit mit dem Computer weit kritischer gegenüberstehen als von ihm erwartet: „... die Arbeit mit Schreibstift und Papier erscheint ihnen einfacher als die Handhabung des Computers. Wer das mathematische Problem nicht vollständig verstanden hat, verliert bald den Überblick über das, was er am Bildschirm produziert hat." – Ein sehr vertrautes Problem!

Grundideen und Fundamente

Wenn unser Unterricht darin besteht, daß wir Kindern Dinge beibringen,
die in einem oder in zwei Jahrzehnten besser von Maschinen erledigt werden,
beschwören wir Katastrophen herauf.

Hans Freudenthal (1973)

Es ist noch gar nicht so lange her, daß Manager glaubten, alle Probleme ließen sich allein durch die Umstellung der Betriebsabläufe und der Verwaltung auf Computer lösen. Seither erweist sich die Weisheit „Was ohne EDV nicht funktioniert, funktioniert auch mit EDV nicht – nur schneller" immer wieder als wahr. Das wird auch für den Mathematikunterricht gelten: „Was ohne Taschencomputer nicht funktioniert, funktioniert auch mit Taschencomputer nicht – nur schneller."

Der CAS-fähige Taschencomputer wird einfach dadurch, daß er da ist, dazu führen, daß in den grundlegenden Übungsphasen des Mathematikunterrichts die Komplexität von Termumformungen, die Komplexität von Gleichungsaufgaben reduziert werden. Man wird sich nur auf die einfacheren beschränken, wird nur die Grundidee vermitteln. Aber auf dieser Grundidee kann man dann aufbauen – und kann die komplizierteren, rechentechnisch aufwendigeren Aufgaben dabei getrost dem Taschencomputer übertragen.

Wichtig ist das gesunde Fundament, und dieses gesunde Fundament war schon immer erforderlich. Das Problem in der Schule, das Problem der Lehreraus- und -weiterbildung ist und bleibt: Wie lernen wir diese Fundamente gut zu setzen? Erfordert dies nicht eine entsprechende Verschiebung der Schwerpunkte im Unterricht, weniger Einüben von Rechentechniken, sondern stärkeres Betonen eher schöpferischer, beschreibender, begründender und beurteilender Fähigkeiten? Dieses Problem ist älter als alle Computer-Algebra-Systeme. Doch die Computer-Algebra-Systeme machen es richtig deutlich, unübersehbar, unausweichlich.

Mathematik-Aufgaben – einmal anders?!

Wie aber sieht es im Unterrichtsalltag aus? In einem System, wo bei *allen* Beteiligten sich alles immer wieder um Noten und Bewertung, um Leistung und Erfolg dreht, kommt den Aufgaben insbesondere in Leistungskontrollen eine entscheidende Bedeutung zu. In der regelmäßigen Rubrik „Die etwas *andere* Aufgabe“ (HERGET 1995) in der Zeitschrift „mathematik lehren“ wird daher ein pragmatischer, an der Schulrealität orientierter Ansatz weiter verfolgt: Wie können (könnten, sollen, sollten, müssen, müßten, ...) „andere“ Aufgaben für *Klassenarbeiten* aussehen, die die genannten, angestrebten bzw. anzustrebenden höheren Fähigkeiten ansprechen? Denn wer kennt sie nicht, die typische Schülerfrage: "Kommt das auch in der Arbeit dran?"

Divergente Aufgaben statt konvergenter Aufgaben

Heinrich WINTER (1988) stellt die folgenden beiden Aufgaben nebeneinander; Aufgaben vom Typ (1) nennt er „konvergent“, solche vom Typ (2) nennt er "divergent".

(1) Löse die quadratische Gleichung $x^2 + x - 12 = 0$.

(2) Suche (z. B. 10) möglichst verschiedenartig aussehende quadratische Gleichungen, die alle die Lösungsmenge $\{-4, 3\}$ haben.

Konvergente Aufgaben wie (1) haben nur *eine* eindeutige Lösungsmenge, und es soll in der Regel nur *ein* bekanntes Lösungsverfahren angewendet werden. Ziel der Aufgabe ist es, dieses Lösungsverfahren einzuüben bzw. dieses abzuprüfen. Solche Aufgaben haben sich in der Schulwirklichkeit bewährt, sie beherrschen eindeutig unsere Schulbücher und die Klassenarbeiten – für die Lehrer sind sie leicht zu korrigieren, und für die Schüler sind sie (wenigstens leidlich) trainierbar. Die Kurvendiskussion als traditionelle Abituraufgabe ist eine typische konvergente Aufgabe.

Für divergente Aufgaben wie (2) sind *mehrere,* durchaus unterschiedliche Lösungen und Lösungswege denkbar. Als erster Ansatz genügt vielleicht eine Standardidee – hier etwa über den Viëtaschen Wurzelsatz: $(x + 4)(x - 3) = x^2 + x - 12 = 0$. Offen bleibt aber nun, wie weitere, dem Aufgabentext gemäß „möglichst verschiedenartig aussehende“ Gleichungen zu finden sind. Dazu gilt es, algebraisches Wissen zu aktivieren und dieses dann schöpferisch einzusetzen – genau das ist das erklärte Ziel dieser Aufgabe.

Gerade bei den sonst so trockenen Aufgabenplantagen rund um Gleichungen und Ungleichungen bietet es sich an, einmal „umgekehrte“ Aufgaben einzustreuen – hier ein Beispiel aus WAGENFÜHR / HERGET 1993, S. 41:

> Versuche, Gleichungssysteme aufzustellen, die jeweils die Lösungsmenge {(1|3)} haben und sich besonders gut
>
> a) mit dem Additionsverfahren,
> b) mit dem Gleichsetzungsverfahren,
> c) mit dem Einsetzungsverfahren
>
> lösen lassen.

Eine Gleichung wird eingekleidet

Bei den üblichen Textaufgaben geht es darum, zunächst den Text aus der Umgangssprache in die Formel-Sprache der Mathematik, also etwa in eine Gleichung zu übersetzen. Eine umgekehrte Problemstellung, nämlich eine vorgegebene Gleichung einzukleiden, ist eher selten und mag zunächst vielleicht wenig „mathematisch“ erscheinen.

> Hinter der Gleichung $x + 4 = 18$ könnte sich die folgende Aufgabe verbergen: „Klara muss noch 4 Jahre warten, bis sie volljährig ist. Wie alt ist sie?“
>
> Versuche, zwei weitere (möglichst lustige) Textverkleidungen für die Gleichung $x + 4 = 18$ zu finden.

Aufgaben wie diese, eingebettet in eine geeignete Umgebung, haben HERGET/ WAGENFÜHR 1991/1996 bewußt sogar in einem (Nach-)Hilfe- und Übungsbuch aufgenommen. Unsere Erfahrungen im Unterricht zeigen, daß sich damit das grundlegende Verständnis für den wichtigen Übersetzungsprozeß zwischen den beiden „Sprachen“ erkennbar verbessern läßt – nicht zuletzt auch deshalb, weil für „mathe-schwache“ Schülerinnen und Schüler solche Fragestellungen einfacher sind und sich daher auch eher Erfolgserlebnisse einstellen.

„Konvergent“ = leicht, „divergent“ = schwer?

„Konvergente Aufgaben sind leicht, divergente Aufgaben sind schwer“ – stimmt das? Die genannten Beispiele zeigen, daß eine divergente Aufgabe nicht notwendig schwerer sein muß. In jedem Falle werden aber unterschiedliche Schwerpunkte bezüglich der angesprochenen Fertigkeiten und Fähigkeiten gesetzt.

„Konvergente Aufgaben prüfen Routinetechniken, divergente Aufgaben stellen höhere Anforderungen" – selbst diese Beschreibung wäre zu schlicht. Natürlich kann man die Schülerinnen und Schüler auch auf divergente Aufgaben vorbereiten, sie gezielt „trainieren“. Welche Ansprüche eine Aufgabe stellt, hängt schließlich auch von dem vorangegangenen Unterricht und den Übungen ab. Nicht zuletzt deshalb wird zu Abiturvorschlägen regelmäßig auch die Schilderung der Unterrichts-Vorgeschichte verlangt; ohne diese hätte ein Außenstehender wohl kaum eine Chance, den Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe einigermaßen richtig einzuschätzen.

„Öffnen“ von konvergenten Aufgaben

Was man sich selbst erfinden muß, läßt im Verstand die Bahn zurück,
die auch bei anderer Gelegenheit gebraucht werden kann

Lichtenberg

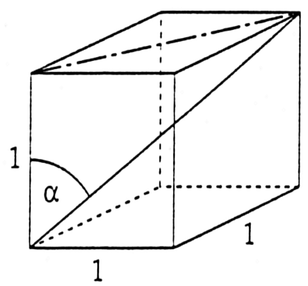
Auch die Formulierung einer Aufgabe beeinflußt den Anforderungscharakter ganz erheblich. Als Beispiel hierfür eine Aufgabe für Klasse 10 oder für einen Kurs in der Sekundarstufe II:

> Wie groß ist der Winkel, den eine Raumdiagonale eines Würfels mit einer anliegenden Kante bildet?

Diese Aufgabe ist ganz bewußt so knapp und ohne erläuternde Zeichnung formuliert, Benennungen und Variablennamen fehlen, Lösungswege sind nicht vorgezeichnet, ggf. ist ein passendes Koordinatensystem erst noch (möglichst geeignet!) zu wählen. Dies ist zunächst einmal ungewohnt, und es ist zweifellos anspruchsvoll, aufwendig und anstrengend – aber es verlangt und fördert gerade diejenigen Fähigkeiten, die nicht ohne weiteres dem Computer übertragen werden können!

Würde man jeweils eine Zeichnung mit einem günstigen Koordinatensystem, mit nützlichen Hilfslinien und sinnvollen Benennungen ergänzen, so wäre allein dadurch schon die Lösung (und, zugegeben, auch die Korrektur!) erheblich erleichtert. Je nach der Art des Vorwissens könnte sich dadurch sogar eine Standardaufgabe ergeben:

> Wie groß ist der Winkel α, den eine Raumdiagonale dieses Einheits-Würfels mit einer anliegenden Kante bildet?



Bisher hatten unsere Erfahrungen beim Stellen und Korrigieren von Aufgaben stets dazu geführt, daß die Formulierungen umfangreicher wurden; sorgfältig ergänzt mit hilfreichen Hinweisen, Benennungen und Zeichnungen, dabei möglichst dem Muster „vom Konkreten zum Allgemeinen“ folgend.

Aber ist es denn wirklich richtig, unseren Schülerinnen und Schülern (und, natürlich, uns selbst) dies immer und überall so leicht wie nur irgend möglich zu machen? Bleiben dann nicht gerade nur die rechen-technischen Routineaufgaben übrig – und all die anderen, anspruchsvolleren und wirklich „bildenden“ höheren Anforderungen und Fähigkeiten auf der Strecke?

Wir bemühen uns jetzt jedenfalls, nicht immer den Weg des geringsten Widerstandes zu gehen. Wenigstens ab und an, hier und da muten wir unseren Aufgabenlösern (und, natürlich, uns als Korrekteuren) nun auch einmal einen mühsamen, steinigen, eben naturbelassenen Pfad zu. Dabei bemühen wir uns, daß unsere Schülerinnen und Schüler (und, natürlich, wir) zwar ins Schnaufen kommen, aber nicht die Luft und nicht die Lust verlieren. Schließlich gelingt dieses ja auch den Sportlehrern; und für die Deutsch-Kolleginnen und -Kollegen gehört es zum selbstverständlichen Alltag, Aufsätze zu korrigieren und zu benoten – warum sollten wir das nicht auch schaffen?

Der mathematische Aufsatz

Aufgaben, in denen umgangssprachlich argumentiert, begründet und beschrieben werden muß, sind ausgesprochen selten. Bei den üblichen Mathematik-Aufgaben geht es höchstens noch darum, sich für das richtige Lösungsverfahren zu entscheiden – dann wird (fast) nur noch gerechnet. Die nützliche, zweckmäßige, zeit- und platzsparende Symbol- und Formelsprache der Mathematik verleitet dazu, sich ausschließlich in dieser Welt zu bewegen. Tatsächlich ist dies aber nur ein Teil der Mathematik; tatsächlich besteht Mathematik sehr wohl auch aus sprachlicher Kommunikation, selbst und gerade in der Wissenschaft. Schülerinnen und Schüler (und auch wir) beklagen, daß Schulbücher nicht leicht zu lesen sind – aber zum einen ist es nun einmal schwer, Mathematik zu vermitteln, und noch schwerer, es schriftlich tun zu müssen, und zum anderen will es auch gelernt sein, mathematische Texte zu lesen. Warum also nicht als *eine* Aufgabe in der entsprechenden Klassenarbeit stellen:

Wie löst man eine quadratische Gleichung? Beschreibe ausführlich an einem von dir geeignet gewählten Beispiel, wie du bei der Methode der quadratischen Ergänzung vorgehst.

„Wo steckt der Fehler?“

Falsche Argumentationen zu entlarven, Fehler aufzudecken und Sachverhalte richtigzustellen, Standpunkte mit Mathematik zu begründen – all das bedeutet auch, sich mit Mitteln der Sprache kritisch auseinanderzusetzen. Die folgende Aufgabe geht auf eine Idee von H.-C. REICHEL zurück:

Klaus rechnet:

$$\begin{aligned} -4 &= \sqrt[3]{-64} \\ &= (-64)^{\frac{1}{3}} = (-64)^{\frac{2}{6}} \\ &= \sqrt[6]{(-64)^2} = \sqrt[6]{64^2} \\ &= \sqrt[3]{64} = 4. \end{aligned}$$

Klara: „Aber – 4 = 4, das kann doch nicht sein!“

Klaus: „Klar(a), ...“

Was meinst du dazu?

In dieser Aufgabe geht es um ein „Rezept“, das in der Regel routinemäßig angewendet wird. Ziel ist es, die Grenzen des Verfahrens (wieder) in den Blick zu nehmen.

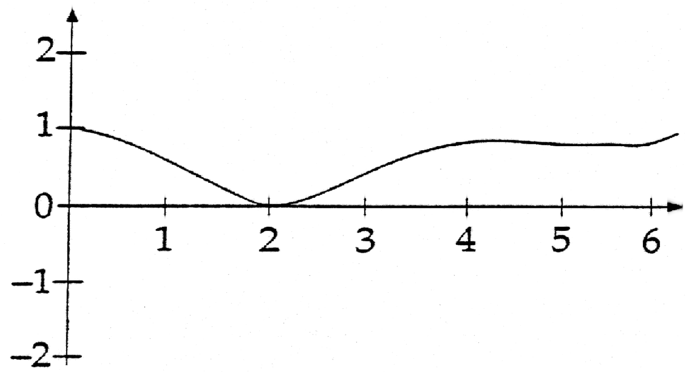
Qualitative Aufgaben statt quantitativer Aufgaben

Eine weitere Möglichkeit, das „Rechnen nach Rezept“ zugunsten inhaltlicher, qualitativer Argumentationen zurückzudrängen, bietet sich, wenn Funktionen nicht durch

Formeln oder Terme vorgegeben, sondern nur qualitativ durch eine Skizze des Graphen beschrieben werden.

Die Zeichnung zeigt den Graphen von $x \mapsto f(x)$.

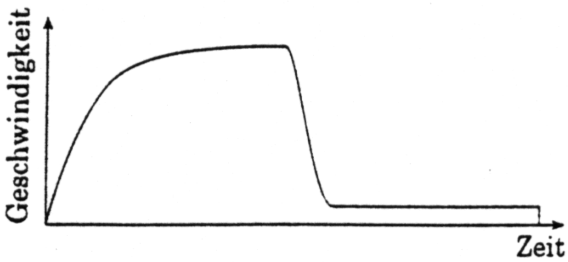
Skizzieren Sie in dasselbe Koordinatensystem den Graphen von $x \mapsto f'(x)$.



Um das *Verständnis* des *Begriffs* „Ableitung“ bzw. das *Grundwissen* um das *Verhalten* bestimmter Funktionstypen anzusprechen, sind solche qualitativen Aufgaben sicher besser geeignet als Aufgaben der Art „Differenzieren Sie ...“ oder „Zeichnen Sie den Funktionsgraph zu $f(x) = ...$“!

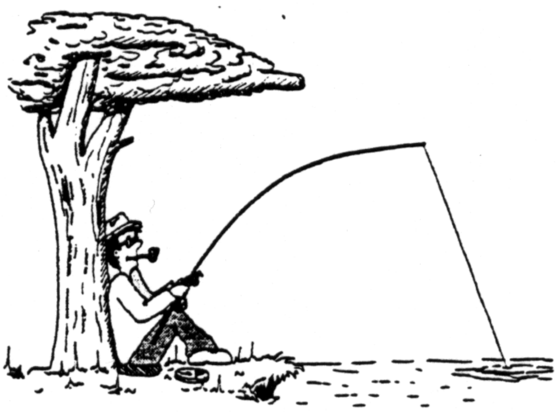
Welcher Sport ist das?

Welcher Sport liefert einen Graphen wie diesen hier?



Wähle diejenige Antwort aus der folgenden Liste, die am besten passt:

- Angeln
- Stabhochsprung
- 100-m-Lauf
- Fallschirmspringen
- Golf
- Bogenschießen
- Speerwerfen
- Hochsprung
- Turmspringen
- Billard
- Drag Racing (Auto-Beschleunigungsrennen)
- Wasserski



Erläutere ausführlich deine Wahl:

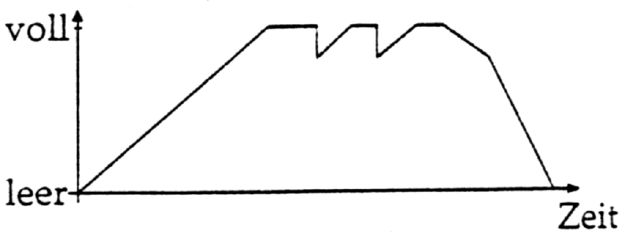
- Wie und warum erfüllt die von dir ausgewählte Sportart den charakteristischen Verlauf des Graphen?
- Warum passt jede der anderen Sportarten nicht (oder nicht so gut)?

Diese Aufgabe (hier unsere Übersetzung) stammt aus dem Buch „The Language of Functions and Graphs“ von Malcolm Swan und steht unter dem Motto „Graphs and Stories“ (http://acorn.educ.nottingham.ac.uk/ShellCent/PubList/tss/sport.html).

Ziel der Aufgabe ist es, Ideen zur Interpretation von vorgelegten Funktionsgraphen zu entwickeln – sicherlich gehört das richtige Lesen und verständige Interpretieren solcher Graphen mehr denn je zu denjenigen Fertigkeiten, die unser Unterricht zu vermitteln hat.

Das Schaubild beschreibt den Wasserstand in einer Badewanne.

Erfinden Sie eine passende „Story“ dazu!



Für viele ist dies die Lieblingsaufgabe, und in mancher Pause können wir dann heiter-ernsthafte Auseinandersetzungen über die verschiedenen „Badewannen-Geschichten“ belauschen... übrigens, wie sieht's mit *Ihrer* Story aus?

Kleine Schritte...

Bei der genaueren Betrachtung dieser und anderer Beispiele wird wieder einmal deutlich, wie sehr der Anforderungscharakter einer Aufgabe von dem vorangegangenen Unterricht abhängt. Natürlich ist es unverzichtbar, die Schülerinnen und Schüler auf solche veränderten Aufgabenstellungen im Mathematikunterricht angemessen vorzubereiten, und selbstverständlich können die bewährten Kurvendiskussionen nicht einfach per Erlaß und über Nacht ersetzt werden. Aber unstrittig ist, daß es im Mathematikunterricht noch mehr als bisher darum gehen muß, die Bedeutung, Tragweite, Anwendbarkeit usw. der mathematischen Begriffe und Methoden zu vermitteln, und weniger darum, ein (Rechen-) Rezept souverän zu beherrschen – denn das kann der Taschencomputer besser!

Bildungsziele – damals, heute, demnächst

Der Computer zwingt uns zum Nachdenken über Dinge,
über die wir auch ohne Computer längst hätten nachdenken müssen

Hans Schupp

Insbesondere auf den einschlägigen Fachtagungen (HISCHER 1992 ff.) wurde immer wieder von dramatischen oder gar „galaktischen“ Veränderungen gesprochen. Uns erscheint das ein bißchen zu dramatisch, zu galaktisch, zu euphorisch. Wir denken, daß wir sehr viel tun müssen, auch für die Lehrerfort- und -weiterbildung, aber wir glauben nicht, daß die Änderungen so dramatisch sein werden.

So werden seit vielen Jahren die folgenden allgemeinen Ziele des Mathematikunterrichts weitgehend übereinstimmend genannt (siehe etwa HERGET 1994):

- Probleme lösen lernen,
- Heuristische Strategien kennenlernen,
- Beweisen lernen,
- Begriffe bilden lernen,
- Mathematisieren lernen,
- Algorithmisches und kalkülhaftes Arbeiten kennenlernen.

Den Ausgangspunkt für einen solchen Katalog allgemeiner Lernziele bilden dabei die folgenden mathematischen Grundtätigkeiten, die für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II als typisch angesehen werden (TIETZE / KLIKA / WOLPERS 1996):

Obere Komplexitätsebene

A 1 Mathematisieren
A 2 Argumentieren, Begründen
A 3 Heuristisches Arbeiten
A 4 Lokales und globales Ordnen

Untere Komplexitätsebene

B 1 Analysieren, Synthetisieren
B 2 Generalisieren, Spezialisieren; Abstrahieren, Konkretisieren, Klassifizieren
B 3 Strukturieren, Analogisieren
B 4 Repräsentieren: Enaktivieren, Ikonisieren, Verbalisieren, Formalisieren
B 5 Beweisen, Definieren, Schließen

Wir können nicht erkennen, daß sich hieran, an den allgemeinen Zielen *im Großen*, etwas wesentlich ändern wird und ändern muß. Die Frage ist eher die: Was hat das für Konsequenzen für unseren Unterricht *im Kleinen*?

Es kann im Mathematikunterricht jedenfalls nicht mehr darum gehen, sich – vor allem in den Prüfungsaufgaben – vorwiegend auf Kalkülfertigkeiten zu konzentrieren; es gilt vielmehr, Aspekte zu betonen und im Unterricht zum Thema zu machen wie z. B. den *Prozeß* des Modellbildens, den *Prozeß* des Problemlösens, den *Vergleich* von Algorithmen (etwa Vergleich von verschiedenen Verfahren zum Lösen eines bestimmten Gleichungstyps), den *Prozeß* der Begriffsbildung. Es ist und bleibt eine wichtige Aufgabe, dies an der Schule zu realisieren – mit und ohne moderne, leistungsfähige Taschencomputer.

Literatur

Baumann, Rüdeger: Zur Methodik des Analysisunterrichts bei Einsatz eines Computer-Algebra-Systems. In: mathematik lehren, (1995) 70, S. 63-65.

Herget, Wilfried: Ziele und Inhalte des Informatikunterrichts – zum Vergleich. In: Hischer 1994, S. 28-40.

Herget, Wilfried: Mathe-Aufgaben – einmal anders?! In: mathematik lehren (1995) 68, S. 64-66.

Herget, Wilfried; Wagenführ, Karin: Gleichungen und Ungleichungen. 7. und 8. Schuljahr. Schroedel Praktikum. Schroedel, Hannover 1991. Neubearbeitet unter dem Titel: OKiDOKi – Die Lernhilfe. Gleichungen. Schroedel, Hannover 1996.

Hischer, Horst (Hrsg.): Mathematikunterricht im Umbruch? Erörterungen zur möglichen "Trivialisierung" von mathematischen Gebieten durch Hardware und Software. Franzbecker, Hildesheim 1992.

Hischer, Horst (Hrsg.): Wieviel Termumformung braucht der Mensch? Fragen zu Zielen und Inhalten eines künftigen Mathematikunterrichts angesichts der Verfügbarkeit informatischer Methoden. Franzbecker, Hildesheim 1993.

Hischer, Horst (Hrsg.): Mathematikunterricht und Computer – neue Ziele oder neue Wege zu alten Zielen? Franzbecker, Hildesheim 1994.

Hischer, Horst / Weiß, Michael (Hrsg.): Rechenfertigkeit und Begriffsbildung – Zu wesentlichen Aspekten des Mathematikunterrichts vor dem Hintergrund von Computeralgebrasystemen. Franzbecker, Hildesheim 1996.

Lux, Franziska; Herget, Wilfried; Klika, Manfred: Verbreitung von Taschenrechnern und Einsatz im Unterricht – Ergebnisse von Lehrer- und Schülerbefragungen. In: mathematica didactica **19** (1996) 2, 58-91.

Reichel, Hans-Christian: Sprachschulung und Spracheinsatz im Mathematikunterricht. In: Postel, H. / Kirsch, A. / Blum, W. (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen. Schroedel, Hannover, S. 156-169.

Tietze, Uwe-Peter; Klika, Manfred; Wolpers, Hans: Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II. Vieweg, Braunschweig 1996.

Wagenführ, Karin; Herget, Wilfried: Gleichungssysteme. 8. und 9. Schuljahr. Schroedel-Praktikum. Schroedel, Hannover 1993.

Winkelmann, Bernard: Taschenrechner und Fachdidaktik: Einige strategische Perspektiven. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) **10** (1978) 3, S. 153-159.

Winter, Heinrich: Divergentes Denken und quadratische Gleichungen. In: mathematik lehren (1988) 28, S. 54-55.

Prof. Dr. Wilfried Herget
Dr. Elvira Malitte
Dr. Rolf Sommer
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
FB Mathematik & Informatik
Didaktik der Mathematik
D-06099 Halle
Germany

herget@mathematik.uni-halle.de